97
- 4 -

T.C.
BAŞVEKÂLET
DEVLET METEOROLOJİ
İş. Um.Md.

- KURS NOTLARI -

METEOROLOJİST İÇİN MATEMATİK

Y a z a n l a r

Ord.Prof.Dr. HANS H. NEUBERGER
Pennsylvania State University

SIDNEY TEWELES Jr.M.S.(Mutehassıs)
U. S. Weather Bureau

Ç e v i r e n
CEMAL BERGEN
(Meteorolojist)

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
Meteoroloji Eğitim Kurslarında
verilen ders notlarından alınmıştır.

1954 - 1955
İSTANBUL

A N K A R A
1955

Meteoroloji Teksir Atölyesi
(Ad. 470)

METEOROLOJİST İÇİN MATEMATİK

(Ders Notları)

Yazanlar :

Ord. Prof. Dr. HANS H. NEUBERGER
Pennsylvania State University

SİDNEY TEWELES Jr.M.S.(Mütehassıs)
U.S. Weather Bureau

Çeviren :

CEMAL BERGEN
Meteorolojist

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

Meteoroloji Eğitim Kurslarında
Verilen Ders Notlarından Alınmıştır

1954 -- 1955
İSTANBUL

BAŞBAKANLIK
DEVLET METEOROLOJİ İŞLERİ
UMUM MÜDÜRLÜĞÜ

Tarafından Yayınlanmıştır

Meteor-Ofset
1955
ANKARA

METEOROLOJİST İÇİN MATEMATİK

Mevzu	Sahife

METEOROLOJİST İÇİN MATEMATİK

Yazanlar: H.Neuberger ve S.Teweles,Jr.
Çeviren : Cemal Bergen

A. CEBİR

1. ONDALIK KESİRLER VE YÜZDELER

Ondalık kesir, bir virgül veya noktadan sonra onu takip eden rakamlar silsilesinden müteşekkildir; 0,125 te olduğu gibi. Bir ondalık kesir, ondalık virgülünden sonraki rakamları, " 1 " den sonra küsurat hanesinin adedi kadar sıfır konarak elde edilen rakama bölmek sureti ile, bayağı kesire çevrilebilir. Şöyle ki; 0,125 (0.125 veya .125 yahutta ,125 şeklinde de yazılabilir.) 125 : 1000 (şu şekilde de yazılabilir; 125/1000 veya $\frac{125}{1000}$) dir. Bunun manası; 125 rakamı " 1 " i takip eden üç sıfırlı bir kıymete yani 1000 e bölünmüştür. Diğer bir misal; 0,0340 eşittir 340/10000 veya 34/1000 dir. Eğer biz kesiri basitleştirirsek; Birinci şıkta 125/1000=1/8, ikinci şıkta ise; 34/1000=17/500 ü elde ederiz.

Tam adetli ondalık kesir, yukarıdaki gibi ayni tarzda , tam adetli bayağı kesire çevrilebilir. Misal; $2,25=2+0,25=2+25/100=2\frac{1}{4}$ dür.

Bir yüzde, paydası 100 olan (ki; şöyle yazılır %) bir sayıdır. Böylece, % 50=50/100= 1/2=0,50=0,5 dir. Çevirmekte; her hangi bir sayı, yüzle çarpılmak sureti ile yüzde şeklinde ifade edilebilir. 0,36 yüzde şeklinde ifade edilirse; 0,36 x 100 = % 36 bulunur. 0,005 i yüzde olarak ifade edecek olursak; 0,005x100= % 0,5 buluruz.

A kıymetini, diğer B kıymetinin yüzdesi olarak ifade edersek; A bölünür B ye ve 100 ile çarpılır. O zaman yüzde P=(A/B)100 olur. Misal; 12 nin yüzde 3 ü nekadardır? Sorusuna cevap olarak; p=3/12 x 100 = % 25 bulunur. Yine biz 12 nin % 25 i nekadardır? diye de bir soru sorabiliriz. Cevap, eşitliği tekrar tanzim etmekle bulunur: A= P.B/100. Böylece, A= 0,01 x 25 x 12 = 3 elde edilir. Yine biz, 3 ün yüzde 25 i kaçtır ? diye sorarsak; buna şu eşitlikle cevap verebiliriz; B=(A/P)100. Böylece, B=(3/25)100=12 bulunur.

Bir bayağı kesir, payı paydaya bölmek sureti ile ondalıklı kesir şekiline çevrilebilir. Misal; 5/8=0,625 gibi.

2. SAYILARIN TİPLERİ

Sayılar ıskalası tam rakamları ihtiva eder. 2; 365; -46 vesaire gibi. Rasyonel kesirler; 2/3, 3/11, -9/17 vesairedir. Sayıların birimi 1'dir. Her hangi bir sayı 1 le çarpıldığı veya 1 e bölündüğü zaman; o sayı değişmez ve olduğu gibi kalır. Böylece, n x 1 = n ve n/1 = n dir. Buradaki n ler her hangi bir sayının yerine konulmuştur. Bu sayı tam adet veya kesir olabilir.

Pozitif sayılar, negatif sayılardan, ıskalanın sıfır rakamı ile ayrılırlar. Sıfırın bazı hususi hassaları vardır: Her hangi bir sayıya 0 ilâve edilir veya herhangi bir sayıdan sıfır çıkarılırsa; o sayı değişmez. Misal; n-0=n veya n+0=n dir. Her hangi bir sayı sıfırla çarpılırsa; netice sıfırdır: n x 0 = 0 dır. Sıfır her hangi bir sayıya bölünürse netice yine sıfırdır. 0/n = 0 .

Fakat, her hangi bir sayının sıfıra bölünmesine müsaade edilemez. Böylece, n/0 izah edilemez.

3. TOPLAMA, ÇIKARTMA, ÇARPMA, BÖLME VE ÜSLÜ ÇOKLUKLAR

Belli başlı ameliyelerin silsilesini göstermek için; bazı terimler birbirleri ile tırnak ( ) , parantez [ ] , rabıt { } işaretleri kullanılarak birleştirilirler. Eğer sembol gurubu + işaretinden sonra geliyorsa; bu işaretler, metamatikî terimlerden kaldırılabilir. Eğer işaret, - tan sonra geliyorsa; bu işaret, ancak içerideki işaretlerin ters çevrilmesi ile kaldırılabilir. Misal; $2x+(3x-4+7y)=2x+3x-4+7$ dir. Fakat; $2x-(3x-4+7y)=2x-3x+4-7y$ dir.

İşaretleri ayni olan iki sayıyı toplarken; bu iki sayı birbirine ilâve edilir ve neticenin önüne, sayıların işareti konur. $(+6)+(+2)=+8$; $(-6)+(-2)=-8$

Birbirine benzemeyen işaretleri haiz iki sayıyı toplamak için; o iki sayı arasındaki fark bulunur ve bu farkın önüne büyük sayının işareti konur; $(-6)+(+2)=-4$. de olduğu gibi.

Pozitif veya negatif olsun, iki sayıyı bir birinden çıkartmak için ; çıkarılacak sayının işareti değiştirilir ve bu iki sayı toplanır. Misal; $(-3)-(-5)=(-3)+(+5)=+2$ veya $(+4)-(+7)=(+4)+(-7)=-3$ tür.

İşaretleri ayni olan iki sayı çarpıldığı zaman çarpımın işareti pozitiftir. $(+3)(+4)=+12$ ve $(-3)(-4)=+12$ de olduğu gibi.

Çarpılacak iki sayının işaretleri zıt olduğu zaman ; çarpım negatif olur: $(+3)(-4)=-12$ veya $(-3)(+4)=-12$ dir.

Ayni kaideler bölümler için de doğrudur. Eğer iki sayı ayni işarete sahipse; bölüm pozitif, zıt işaretlere sahip ise; bölüm negatiftir. Böylece; $(-6) : (-2)=+3$ veya $(+8) : (+2)=+4$ dür. Fakat, $(-9) : (+3) = -3$ veya $(+12) : (-3) = -4$ dür.

a ve b gibi iki sayı kabul edelim . Bu sayıların toplamı; $a+b$ veya $b+a$ şekilinde yazılabilir. Çünki; iki ameliyenin neticesi de aynidir. Misal; Eğer $a=3$, $b=4$ ise; buradan $3+4=4+3=7$ dir. Ayni şey iki sayıyı çarptığımız zaman da doğrudur. $a.b=b.a=ab=ba$ dır. Eğer $a=3$ ve $b=4$ ise; o zaman; $3.4=4.3=12$ dir. Bu tersine çevrilebilme; Tahvil Kanunu (Commtative Law) olarak bilinir. Bu kanun , çıkarma ve bölme ameliyelerine şamil değildir. Çünki; $a-b\neq b-a$ veya $3-4=-1\neq 4-3=+1$ dir. Ayni veçhile; $a/b \neq b/a$ veya $3/4 \neq 4/3$ dür.

Eğer, a,b,c gibi üç sayı çarpılacaksa; çarpma sırasının ehemmiyeti yoktur. Böylece $a(b.c) = (ab)c = (ac)b = a(cb) = (bc)a$ diye gider. Bu toplam için de raci olan Birleşim Kanunu (Associative Low) olarak bilinir. $a+(b+c) = (b+a)+c = (a+b)+c$ diye gider.

Toplam ve çarpımın bir terkibi, Dağıtım Kanunu'na (Distributive Low) tabidir. $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ dir. Toplanan terimler, bir tırnak veya parentezle beraber guruplandırılmışsa; çarpım, toplama ve çıkarmadan daha evvel yapılır. Bu bölüm için de doğrudur. Böylece $a.b+c\neq a(b+c)$ dir. Çünki; birinci durumda, ilk olarak c ilâve edilmeden evvel a, b ile çarpılmalı, ikinci durumda , tırnak işareti ( ) ilk defa a ile çarpmadan evvel b nin c ye ilâve edileceğini veya Dağıtım Kanununa göreb ve c her ikisi de toplanmadan evvel a ile çarpılmalı. Böylece, eğer $a=3$, $b=4$ ve $c=6$ ise; $3.4+-=18\neq 3(4+6)=30$. dur.

Eğer, her hangi bir sayı olan a, kendi nefsi ile n defa çarpılırsa; a.a.a...a onu biz a^n olarak yazabiliriz ki; burada a ya taban, n ye üs denir. a^n; a nın n inci derecen kuvvetidir. Böylece bir misal verirsek; $a^3=a.a.a$ dır. Eğer, a=2 ise; buradan $2^3=2.2.2=8$ bulunur. Şu not edilmeli ki; $a^n \neq n.a$ dır. n.a teriminde n üs değildir. Fakat n bir kat sayıdır. Meselâ; 4 a^2 de 4 katsayı, a taban ve 2 de a nın üssüdür. x^3 teriminin katsayısı 1 dir. x taban ve 3 , x in üssüdür. Yalnız, ayni taban ve ayni üsse sahip kuvvetler toplanıp çıkarılabilir. Meselâ.

$4x^3 + 3x^3 - 2x^3 + 5x^2 = 5x^3 + 5x^2 = 5(x^3+x^2)$ dir. Ayni tabana haiz kuvvetler, üsleri toplanarak birbirleri ile çarpılmış olurlar. Yine tabanları ayni olan iki kuvvet üsleri birbirinden çıkarılmak sureti ile bölünmüş olurlar. Misal; $a^4 \cdot a^3 = a^7$; bölmeye bir misal; $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^-$ dir. Biz şunu görüyoruz ki; $a^2/a^2=a^0=1$. Böylece üssü sıfır olan her hangi bir tabanlı kuvvet bire eşittir. Bu kaideden şu çıkarılabilir; $a^{-3}=a^{0-3}=a^0/a^3=1/a^3$ dür.

Üsleri ayni fakat tabanları ayrı ayrı olan iki veya daha fazla kuvvetlerin çarpımı birleştirilebilir: $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (abc)^3$ dür. Ayni şey, tabanları farklı fakat üsleri benzer olan bölüm için de doğrudur: $a^4/b^4=(a/b)^4$ dür.

Bir kuvvet diğer bir kuvvete üsleri çarpılmak sureti ile yükseltilebilir: $(a^n)^m = a^{nm}$ veya $(a^2)^3=a^6$ dır.

4. KÖKLER

$\sqrt[n]{a}$ ifadesine kök denir. n indeks, a ise bir radikand ' dır. İndeksi 2 olan bir köke; kare kök denir, ve burada 2 rakamı, ekseriyetle ihmal edilir. Böylece, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ dır. Her hangi bir a rakamının kare kökü; kendi kendi ile çarpıldığı zaman a ya eşit olan bir rakamdır. Misâl ; $\sqrt{9} = 3$. Çünki; 3.3=9dur. Buna benzer olarak; $\sqrt[n]{a} = b$ eğer $b^n = a$ ise. Eğer indeks tek sayı ise;(3,9,11 gibi,) yalnız bir kök vardır. Bu kök , radikand negatif ise; negatif, pozitif ise pozitif olur. Misal; $\sqrt[3]{27} = +3$; $\sqrt[3]{-27} = -3$ tür. Çünki; birinci durumda $3^3=3.3.3.= 27$, ikinci durumda ise; $-3^3=(-3)(-3)(-3)=-27$ dir.

Eğer indeks çift rakam ise; (2,6,18 gibi.) radikand'ın iki hakiki kökü vardır. Eğer radikand pozitif ise; köklerden birinin işareti negatif, diğerinin ki pozitiftir. Fakat miktarları aynidir. Misal; $\sqrt[4]{16} = +2$ ve $= -2$ dir. Çünki; 2.2.2.2=16 ve yine (-2)(-2)(-2)(-2)=16 dır. Eğer radikand negatif bir sayı ise; hakiki kök mevcut değildir.

Kök işareti yerine, indeksi kesirli bir üs olarak yazabiliriz; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ veya $\sqrt{25} = 25^{1/2} = 5$ dir. Çünki; $25^{1/2} \times 25^{1/2} = 25^{1/2 + 1/2} = 25^1 = 25$ dir ki; bu radikand idi.

Köklere ait aşağıdaki kanunlara sahibiz:

$(\sqrt[n]{a})^n = a$ çünki $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a$ dır. Böylece; $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$ dir.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ Misal; $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ dır. Çünki; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[mn]{a}$ dır. Misal; $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$ dir.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ Misal: $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[m]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m}}$ i şu şekildede yazabiliriz; $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$. Misal; $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ veya $\sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ dür.

Büyük rakamlardan kaçınılmak için, kuvvete yükseltilmeden evvel, kök alınır. Mükemmel bir n inci kuvveti olan n inci kök şeklindeki her hangi bir faktör, radikandlıktan kurtarılabilir. Meselâ; $\sqrt{63} = \sqrt{9.7} = 3\sqrt{7}$ veya $\sqrt[3]{54\ a^4 b^3} = \sqrt[3]{27\ a^3\ b^3\ 2a} = 3ab\sqrt[3]{2a}$ dır.

Tersine olarak, kökten evvel olan her hangi bir katsayı, indeksin gösterdiği derecede kuvvete yükseltmek sureti ile kök içerisine sokulabilir. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ veya $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{4.3} = \sqrt{12}$ veya $2ab^2\ \sqrt[3]{7ax} = \sqrt[3]{2^3 a^3\ b^6}\ \sqrt[3]{7ax} = \sqrt[3]{8\ a^3\ b^6\ 7ax} = \sqrt[3]{56\ a^4 b^6\ x}$ dir.

Bir kesirli radikand, paydayı kökün dışına çıkartmak ve radikanddaki payı paydanın indekste işaret edilen kuvvetinin bir eksiği ile çarpmak sureti ile tam adet şeklinde yazılabilir. Böylece; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\ \sqrt[n]{ab^{n-1}}$ olur. Çünki;

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a.b^{n-1}}{b\ b^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{a\ b^{n-1}}{b^n}} = \frac{1}{b}\ \sqrt[n]{a\ b^{n-1}}$$ dir. Misal;

$$\sqrt{2/3} = \sqrt{2.3/3.3} = \sqrt{6/3^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$ dır.

5. ÇOK TERİMLİLERİN ÇARPIMI VE BÖLÜMÜ

Bir ifade matematik sembollerinden yalnız bir terim ihtiva ediyorsa; bu ifadeye **TEK TERİMLİ (MONOMİAL)**, eğer o birden fazla terimleri ifade ediyorsa **ÇOK TERİMLİ (MULTİNOMİAL)** denir.

Biz iki çok terimliyi şu şekilde çarpıyoruz: Birinci çok terimlinin her terimi, ikinci çok terimlinin her terimi ile ayrı ayrı çarpıyor ve bu çarpımların neticelerini topluyoruz. Eğer ikiden ziyade çok terimli çarpılacaksa; yukarıdaki ameliye ilk iki terimli üzerinde yapılır ve elde edilen netice, gelen çok terimli ile çarpılır, ve böylece devam edilir. Misal:

$$
\begin{array}{llllll}
(2x^2 - 4xy + 3y^3)(3x - 2y) = & 6x^3 & -12x^2y & +9xy^3 & & \\
 & & -4x^2y & & +8xy^2 & -6y^4 \\
\hline
 & 6x^3 & -16x^2y & +9xy^3 & +8xy^2 & -6y^4
\end{array}
$$

Bir çok terimliyi diğer bir çok terimliye bölmekte, ilk iş; her iki çok terimlideki değişkenleri (x veya y vesaire.) azalan üslerine göre sıralamaktır. Sonra, bölünen bölenin ilk terimine bölünür ve netice bölenin bütün terimleri ile ayrı ayrı çarpılıp toplandıktan sonra elde edilen çarpım neticesi, bölünenin karşılıklı terimlerinden çıkarılır(bayağı bölümde olduğu gibi). Misal :

$$
\begin{array}{llllll}
(8x^5 & -4x^4y + 6x^3y^2 & +4x^3y & -2x^2y^2 + 3xy^3) & : (2x^2 + y) = & 4x^3 - 2x^2y + 3xy^2 \\
8x^5 & & 4x^3y & & & \\
\hline
 & -4x^4y + 6x^3y^2 & & -2x^2y^2 + 3xy^3 & & \\
 & -4x^4y & & -2x^2y^2 & & \\
\hline
 & +6x^3y^2 & & +3xy^3 & & \\
 & +6x^3y^2 & & +3xy^3 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Eğer sonunda bir kalan varsa; kalan bölene bölünür ve bölüme ilâve edilir. (Ayni rakamların bölümünde olduğu gibi; $38/5 = 7\frac{3}{8}$) .

6. EŞİTLİKLER VE ONLAR ÜZERİNDEKİ İŞLEMLER

Bir eşitlik, iki ifade arasındaki müsavatın matematiki bir beyanıdır. Eşitliğin her iki tarafına da ayni terim ilâve edilirse; eşitlik değişmez. Yine, bir eşitliğin her iki tarafından ayni terim çıkarıldığı veya her iki taraf ayni terimle çarpıldığı zaman yahutta her iki taraf ayni terime bölündüğü zaman veya her iki taraf ayni dereceden üsse yükseltildiği veyahut da her iki tarafın ayni derecen kökü alındığı zaman da eşitlik değişmez.

Eğer biz bir eşitlikte bir veya daha fazla bilinmeyen kıymetlere sahipsek; bu bilinmeyenleri çözebiliriz. Farzedelim ki; $6x - 3 = x + 4$ eşitliğinde bilinmeyen kıymet x dir. Biz bu eşitliği x in kıymeti için çözelim ve bulduğumuz değerin eşitlik için varit olduğunu isbat edelim: Yukarıdaki iş için tatbik edilecek ilk yol; bilinmeyen kıymeti haiz terimleri eşitliğin bir tarafına, bilinmeyen kıymeti haiz olmayan terimleri ise; eşitliğin diğer tarafına almaktır. Bizim eşitliğimizde buna muaffak olmak için ; görüyoruz ki eşitliğin her iki tarafından x i çıkartmalıyız (sağ taraftaki x i kaldırmak için.): $6x - 3 - x = x + 4 - x = 4$ olur. Netice; $7x - 3 = 4$ bulunur. Şimdi biz sol taraftaki -3 ü de kaldırmalıyız. Bunu da her iki tarafa 3 ilâve ederek yapmış oluruz: $7x - 3 + 3 = 4 + 3$ olur. Şimdi biz $7x=7$ neticesine sahip olduk. Burada x in katsayısı 7 yi de kaldırmalıyız. Bunu da her iki tarafı 7 ye bölmekle yaparız: $7x / 7 = 7 / 7$ veya $x = 1$ dir. İşte bu sonuç eşitliğin çözümüdür. Bunun doğruluğunu; esas eşitlikteki her x yerine 1 koymakla isbat edebiliriz : $6 . 1 - 3 = 1 + 4$ ve $5 = 5$ bulunur ki; bulunan sonuç doğrudur.

Eğer iki köklü bir denklemimiz varsa; yani bilinmeyen bir defasında kareli bir terim olarak görülürse; biz eşitliği şu okunuşa sıralarız : $ax^2 + bx + c = 0$. Burada x bilinmeyen a, b, c de rakam olarak katsayılardır. Çözüm şu şekle haizdir :

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Böylece, hakikatte iki çözüme yani iki köke sahibiz. Birisi pozitif köke, diğeri de negatif köke uyar. Eğer, bx veya c terimlerinden her hangi birisi yoksa; bunun manası karşılığı olan katsayı sıfır demektir, Meselâ; $2x^2 - 18 = 0$ eşitliği gösteriyor ki; $a=2$, $b=0$ ve $c=-18$ dir. Bu eşitlik, her iki tarafa 18 ilâve etmek sureti ile kolayca çözülebilir: $2x^2 = 18$ dir. Sonra her iki tarafı 2 ye bölecek olursak; $x^2 = 9$ ve buradan da $x = \sqrt{9} = \mp 3$ ü elde ederiz. Burada işaretlerde doğrudur. Meselâ; $3x^2 = 2 + 10x + 7 - 5x - 3 - 4$ eşitliğinin çözümünde ilk olarak bütün benzer terimleri (x li ve x siz.) birleştiriyoruz ve $3x^2 = 2 + 5x$ i elde ediyoruz. Sonra her iki taraftan 2 yi ve 5x i çıkartıyoruz. $3x^2 - 5x - 2 = 0$ oluyor. Şimdi bu eşitlik , çift köklü denklemlerin şeklini almıştır. Bunun katsayıları; $a=3$, $b=-5$, $c=-2$ dir. Biz bu katsayıları formüldeki yerlerine korsak; eşitliğin çözümü:

$$x = \frac{-(-5) \mp \sqrt{(-5)^2 - (4.3)(-2)}}{2.3} = \frac{5 \mp \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \mp \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \mp 7}{6} \quad \text{olur.}$$

Pozitif işaretli çözümde kök; +2, negatif işaretli çözümde kök; -1/3 dür.

Köklerin toplamı daima - b/a ya eşittir. İki kökün çarpımı ise; daima c/a dır. Eğer kök altındaki değer negatif ise; çözüm kompleks bir adettir; bir hakiki ve bir de hayalî adedi ihtiva eder. Hayali rakam çift indeksli, yani kök derecesi çift rakam olan (karekök gibi.) negatif bir sayıdır. Bu birim , $i=\sqrt{-1}$ ile gösterilir. Meselâ; $\sqrt{-4} = \sqrt{+4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$ dir. (a + bi) çok terimlisine kompleks rakam denir. Meselâ; 3-4i gibi.

İki oranın eşit olduğunu ifade eden ; a/b = c/d ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ şeklinde de yazılabilir.) gibi bir ifadeye ORANTI denir. Her hangi bir orantıda, içler çarpımı dışlar çarpımına eşittir: a.d = b.c dir. b ve c nin yerini değiştirirsek şu şekilde de yazabiliriz; a/c = b/d . Yahut a ile d nin yerlerini değiştirebiliriz: d/b = c/ a olur. Yahut da, her orana o oranın paydasını ilâve edebiliriz veya o oranın payından paydasını çıkarabiliriz: (a+b)/b=(c+d)/d veya (a-b)/b=(c-d)/d şeklinde de yazılmış olur. Hakikatte bu neticeler, eşitliğin her iki tarafına bir ilâve veya eşitliğin her iki tarafından birer çıkartılarak elde edilebilir.

Eğer bu iki eşitliğibir birine bölecek olursak , şu eşitliği de elde ederiz: (a+b)/(a-b) = (c+d)(c-d) dir.

Şüphesiz, ilk eşitliğin her iki tarafını ters çevirip te yazabilirfriz: b/a = d/c .

Orantı; geometrik bir manayı da haizdir: a ve c bir açının kenarlarını kesen iki paralel çizginin , bu açının kenarları tarafından ayrılan parçalarıdır. b ve d ise; açının tepesinden, paralel çizgilerin açıların kenarlarından birisi ile olan kesim noktalarına uzaklıklarıdır.

Bir misal kabul edelim ki; bu misal de, a = 1 -x , b=x, c=3 ve d=5 olsun. Bu durumda şu şekilde bir orantı yazılabilir: (1-x)/x = 3/5 . Sonra biz, paydaları paylara ilâve edersek; (1-x+x)/x = (3+5)/5 olur ki; bu da 1/x=8/5 dir. Sonra kesirleri ters çevirirsek; şu neticeyi elde ederiz: x=5 8 .

Genel olarak , eşitlik için olan bütün kaideler, orantılara da tatbik edilebilir. Orantılara ait kaideler, bir değişkenin diğer bir değişken gibi , doğrudan doğruya değiştiği veya bir değişkenin diğer bir değişken gibi bir vasıta ile değiştiği fikirlerini içine alan proplemlerin çözümünde kullanışlıdırlar. Misal olarak biz şunu söyleyebiliriz ki; x, y ye doğrudan doğruya orantılıdır (x , y gibi doğrudan doğruya değişir.) veya x, y ye ters orantılıdır(x, y gibi vasıta ile değişir.) .

Bu iki durum şu şekilde yazılabilir: x=ky ve x=k/y. Veya x, y gibi doğrudan doğruya, z gibi vasıta ile değişebilir. O zaman şunu yazabiliriz: x=k(y/z). Bu durumda üç değişkenle işlem yapıyoruz. Meselâ; aydınlanma şiddeti i, ışık kaynağından olan mesafenin karesi ile ters orantılı olarak değişir.

Eğer 2 metre uzakta aydınlanma şiddeti 100 mum gücü ise; 3 metre uzaktaki aydınlanma şiddetinin ne olduğunu sorabiliriz. $I = k/d^2$ olduğuna göre; $d=2$ veya $d^2=4$ ise; $I=100$ olduğunu biliyoruz. Buradan ; $100 = k/4$ dür. $k=400$ olduğuna göre; $I=400/3^2=400/9$. $44\frac{4}{9}$ mum gücüdür. Hakikatte eşitliği k için çözmek lüzumludur. Eğer biz iki şiddete I_1 ve I_2 , iki mesafeye (d_1, d_2) sahipsek; iki eşitliğimiz; $I_1=k/d_1^2$ ve $I_2= k/d_2^2$ var demektir. Buradan birinci eşitliği, ikinci eşitliğe bölecek olursak; şu orantıyı elde ederiz: $I_1/I_2=d_2^2 / d_1^2$ dir. Bu eşitlikten doğrudan doğruya meselemizi çözebiliriz. Bilinen aydınlanma şiddetini I_1 olarak kabul edersek; $I_1=I_2d_2^2 /d_1^2$ de $I_2=100$, $d_2=2$, $d_1=3$ olduğuna göre; $I_1=100.4/9=44\frac{4}{9}$ bulunur.

7.HUSUSİ ÇARPIMLAR VE ÇARPANLARA AYIRMALAR

Aşağıdaki özelikler, esas çarpımları temsil ederler. Bunlar birçok matematik ameliyelerinin de mühim bir kısmını teşkil ederler. Bunların doğruluğu, hakiki çarpımla isbat edilebilir.

a) $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ dir. Eğer a negatif ise; sağ tarafın ortasındaki terim de negatiftir. Fakat son terim negatif değildir. Çünki; o bir negatif terimin karesidir.

b) $(x - a)^2 = x^2 -2ax + a^2$

c) $(x + a) (x - a) = x^2 - a^2$

d) $(x + a) (x + b) = x^2 + (a+b) + ab$

e) $(x + a) (x - b) = x^2 + (a-b)x - ab$

f) $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2+ 3a^2x + a^3$

g) $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2+ 3a^2x + a^3$

h) $(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$

i) $(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$

k) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

l) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

m) $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

Misal olarak aşağıdakiler verilmiştir :

$(a + 1) (a - 1) = a^2 - 1$ (c formülüne göre)

$29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2.30.1 + 1 = 900 - 60 + 1 = 841$ (b formülüne göre)

$(s + 5) (s^2 - 5a + 25) = s^3 + 125$ (h formülüne göre.)

Yukarıdaki özdeşikler, daha ziyade çarpanlara ayırmada kullanışlıdır. Cebrik ifadeleri çarpanlarına ayırarak halletmekte kullanılır. Meselâ; eğer biz $x^2 - 49$ u çarpanlarına ayırmak istiyorsak c formülünü tatbik ederiz ve $(x+7)(x-7)$ yi elde ederiz. Veya $x^2+7x+12$ şeklinde bir ifadeye sahipsek; d özdeşiğini nazarı itibara almalıyız. Görüyoruz ki; ilk olarak a ve b sayılarını bulmalıyız, ve toplamları $a+b=7$ etsin. Açıkça görülüyor ki; bu iki sayı açıkça 3 ve 4 dür. Çünki; onların toplamı 7 ve çarpımı ise; 12 dir. Mutad olarak, belki de iki köklü bir denklem olan neticeyi çözmek gerekecektir. $a=12/b$ değerini, a+b de yerine korsak $a+b=12/b+b=7$ (veya toplamları kullanarak; $a=7-b$ değerini bulup, ab çarpımında yerine korsak $ab=(7-b)b=12$ bulunur. Her hangi bir nisbette d formülüne göre biz şimdi $(x+3)(x+4)$ çarpanlarına sahibiz. Eğer biz şöyle bir ifadeye sahipsek; $x^2 - 13x + 12$ bu da; d özdeşiğine uyar. $a+b=-13$ ve $ab=12$ dir. Bu $a=-12$, $b=-1$ neticesini verir. Böylece, çarpanlar $(x-12)(x-1)$ dirler.

Bazan, bir ifadeyi çarpanlarına ayırabilmek için bu eşitliğin her iki tarafına bir kıymet ilâve etmeli veya her iki tarafından bir kıymet çıkartılmalıdır. Pek tabi, bu ameliye eşitliğin kıymetini değiştirmez. Meselâ; eğer, y^4+4y^2+16 ifadesinin ortadaki terimi $4y^2$ yerine $8y^2$ olsa idi; bu ifade a özdeşiğine benzeyebilirdi. Bunu elde etmek için, bu ifadeye $4y^2$ ilâve etsek ve çıkarsak ifadenin değeri değişmez: $y^4+8y^2+16-4y^2$ ifadesini elde ederiz ki; orijinal ifadenin aynıdır. Şimdi ilk üç terimin çarpanlarını ayırabiliriz: $(y^4+8y^2+16)-4y^2=(y^2+4)^2-4y^2$ olur. Bu ifade c özdeşiğine göre; iki karenin farkıdır, ve $(y^2+4+2y)(y^2+4-2y)$ veya azalan üslerine göre yazılmış $(y^2+2y+4)(y^2-2y+4)$ e eşittir.

Çarpanlarına ayırmak ameliyesi, paydasınıda köklü terimler olan kesirleri rasyonalize hale sokmakta da kullanılır. Meselâ; $(3\sqrt{5}-\sqrt{3})\ /\ (\sqrt{5}+2\sqrt{3})$ ifadesini rasyonalize edelim. Eğer c özdeşiğine göre; $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})$ ile pay ve paydayı çarparsak:

$$\frac{(3\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})} =$$

$$\frac{3.5-6\sqrt{15}-\sqrt{15}+2.3}{5-12} =$$

$$\frac{21-7\sqrt{15}}{-7} = \sqrt{15}-3 \text{ ü elde ederiz.}$$

Aynı ameliye diğer kesirlere de tatbik edilerek; paydadan kurtarmakta kullanılabilir. Meselâ; $(1-x^2)(2-x)\ /\ (x+1)$ ifadesi, $(1-x)$ ile çarpılıp, tekrar $(1-x)$ e bölünebilir:

$$\frac{(1-x^2)(2-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{(1-x^2)(2-x)(1-x)}{(1-x^2)} = (2-x)(1-x) \text{ elde edilir.}$$

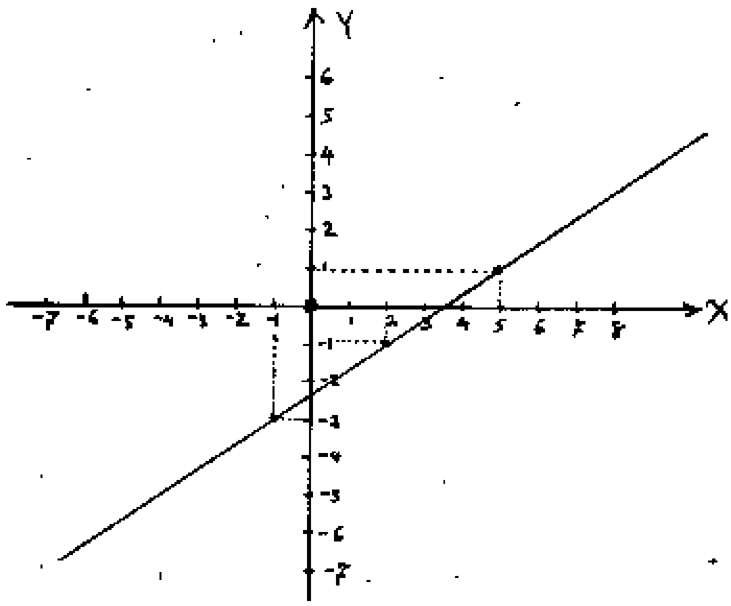
Çarpanlarına ayırma ameliyesinin yukarıdaki özdeşiklerden birini içine alması lüzumlu değildir. Meselâ; $x^2y - 3x^2z + 2xy - 6xz$ ifadesi, ilk iki terimde x^2 yi son iki terimde ise; $2x$ i parantez dışına almakla, çarpanlarına ayrılabilir: $x^2(y-3z) + 2x(y-3z)$ yi elde ederiz. Şimdi bu ifadeyi $(y-3z)$ parantezine de alabiliriz; $(y-3z)(x^2+2x)$ ve son terimde x parantez dışına çıkabilir: $(y-3z)(x+2)x$ olur.

Şunu not edebiliriz ki; daha yüksek üslü bir ifade, karşılığı yukarıdaki özdeşiklerden biri olan daha düşük üslü bir ifadeye indirilebilir. $x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3+8)(x^3-8) = (x^3+2^3)(x^3-2^3)$ ve h, I özdeşiklerine göre; $(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)$ ü elde ederiz.

8. ÇİZGİSEL EŞİTLİKLER

Çizgisel eşitliklerin genel şekli: $ax + b = 0$ dır ve böyle bir eşitlik, bütün eşitlik kaideleri tatbik edilerek çözülebilir. Meselâ; Umumi durumun çözümü: $x = -b/a$ dır. Bir bilinmeyenli çizgisel eşitliğin yalnız bir çözümü vardır. Eğer, $b=0$ ise; çözüm sıfırdır. Meselâ; $2x=0$ eşitliği $x=0$ sonucunu verir.

Eğer, $ax+by+c=0$ gibi çizgisel bir eşitliğe haiz isek; x ve y için , eşitliğe uyan sonsuz sayıda değerler vardır. Meselâ; $2x - 3y - 7 = 0$ eşitliği için $x = 2$, $y=-1$, veya $x=14$, $y=7$ değerleri kanaat vericidir. Eğer biz bu eşitlikte y terimini x terimi ile ifade edecek olursak; $y=(2x-7)/3$ ü elde ederiz. Burada x in her hangi bir kıymeti için y yi çözebiliriz. Bu karşılıklı değerler, orijinal eşitliğe uyar. İki bilinmeyenli bir eşitliğin manasını elde etmek için, bir birini sıfır noktasında dik olarak kesen iki sayılar çizgisini çizebiliriz. Çizginin birisi y için olan sayıları, diğeri ise x için olan sayıları temsil edebilir.



Bu ıskala sistemine DİK KOORDİNAT SİSTEMİ denir. Dik ıskalaya (ekseriyetle y için.) ordinat, ufki ıskalaya da (ekseriya x için) absis denir. Her, iki ıskalanın sıfır noktaları, kesim noktasında bulunur ve bu noktaya orijin denir. Orijinin yukarısına ve sağına doğru olan sayılar pozitif, aşağısına ve soluna doğru olan sayılar ise; negatiftirler. $2x - 3y = 7$ çizgisel eşitliğinin bir doğru olduğunu göstermek için bu eşitliğin karşılıklı x ve y kök çiftlerini koordinat sisteminde işleyebiliriz. Bu çiftler, limitlendirilmemiştir. Çünki; onlardan sonsuz sayıda mevcuttur. Fakat, biz bu doğruyu göstermek için yalnız bir kaç tanesini kâfi buluyoruz:

x	-1	2	5
y	-3	-1	1

gibi.

Bizim grafiğimizde iki noktayı bulmak için , x ıskalasının -1 inden aşağıya doğru -3 e kadar y ıskalasında inerizki; bu nokta birinci noktadır. x ıskalasındaki 2 den, düz olarak aşağıya doğru y deki -1 seviyesine kadar inecek olursak; diğer bir noktayı elde etmiş oluruz. Sonra x ıskalasındaki 5 den , y ıskalasındaki 1 seviyesine kadar yükselelim, bu suretle üçüncü noktayı elde ederiz. Bu üç nokta, çizginin doğru bir hat olduğunu isbata kâfidir. Çünki; bu noktalardan tamamen geçen doğru bir hat çizebiliriz. Bütün diğer çözümler, ayni doğru üzerinde uzanırlar. Meselâ; $x = 0$ için; $y=-7/3=-2\frac{1}{3}$ olduğunu, $y=0$ için de $x=3\frac{1}{2}$ olduğunu bulabiliriz. Her çözümün neticesi; karşılıklı x ve y değerleri (x_1, y_1) şeklinde yazılırlar. Meselâ; (-1, -3 veya $(3\frac{1}{2}, 0)$ veyahutta (5,1) gibi. İlk kıymet x in değeri, virgül bu değere karşı gelen y yazılır. Eğer biz, iki bilinmeyenli iki eşitliğe sahipsek, bunun manası iki doğru var demektir. Bu iki eşitlik, her iki eşitliğe de uyan bir çözüme haiz olabilir. İki doğrunun müşterek bir noktası vardır, veya iki doğru birbirini keser. Bu duruma uygun hal denir. Diğer durum uygun olmayan hal' dir ki; iki doğrunun müşterek noktaları yoktur ve iki doğru birbirine paraleldir. Eşdeğer durumda; bir eşitliğin bütün çözümleri müşterektir. Yani iki doğrunun bütün noktaları müşterektir. Bu iki çizgi üst üste çakışıktır.

Verilen iki eşitlik, kendi bilinmeyenleri için aşağıdaki metodla çözülür: Şu iki eşitliği kabul edelim ;

$$a)\quad 3x - 4y = 7$$
$$b)\quad x + 6y = 6$$

b eşitliğini, a eşitliğinde x in katsayısı olan 3 le çarparsak; her iki eşitlikteki x lerin katsayıları ayni olur. Sonra bu iki eşitlikten birini diğerinden çıkaralım (burada (b) - (a) olsun) ;

$$\begin{array}{rl} -(a) & 3x - 4y = 7 \\ & 3x + 18y = 18 \\ \hline & 0 \quad 22y = 11 \\ & y = 1/2 \quad \text{bulunur.} \end{array}$$

Müşterek noktanın y koordinatı için bir çözüm elde ettik. Şimdi biz y nin bu değerini iki eşitlikten birisinde yerine korsak x için bir çözüm elde ederiz;

$$\begin{aligned} (a)\qquad 3x - 4\,\tfrac{1}{2} &= 7 \\ 3x - 2 &= 7 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Böylecekesim noktası (3 ; 1/2) dir. Bu durum koordinat sisteminde işlenerek , grafikle de gösterilebilir.

Çözüm için diğer bir metod, aşağıdaki gibidir: Eşitliğin birini, bir bilinmeyen için çözer ve diğer eşitlikte yerine koruz. Meselâ; (b) eşitliğini y için çözelim:

$$6y = 6 - x$$
$$y = (6 - x) / 6$$

(a) eşitliğinde yerine koyalım;

$$(a)\quad 3x - 4 (6 - x) / 6 = 7$$

Eşitliğin her iki tarafını 6 ile çarparsak;

$$\begin{aligned} (a)\quad 18x - 24 + 4x &= 42 \\ 22x &= 66 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Şüphesiz, bu çözüm de ayni neticeyi verir. y için çözmekte; x in bu değerini eşitliklerden her hangi birinde yerine koyarız.

$$\begin{aligned} (b)\qquad 3 + 6y &= 6 \\ 6y &= 6 - 3 \\ y &= 1/2 \end{aligned}$$

Uygun olmayan duruma misal olmak üzere aşağıdaki iki eşitliği ele alalım:

$$(a)\quad 2x + 4y = 7$$
$$(b)\quad 2x + 4y = 14$$

Burada (b) yi, (a) dan çıkaracak olursak; $0 = -7$ neticesini buluruz. Bu bir uygunsuzluktur, ve bununlaberaber, ne x için, ne de y için her hangi bir kıymet yoktur. Bu eşitliklerin gösterdikleri doğrular, bir birine pareleldirler. Bu durum, bir grafikte işlenerek gösterilebilir.

• Eşdeğer eşitlikler, a faktörü hariç, diğerleri için özdeş olanlardır. $2x - 3y = 8$, $4x - 6y = 16$ gibi.

Yukarıdaki bu iki eşitlik özdeştirler. Biz bunu iki eşitliğin her iki tarafını iki ile çarpmakla veya ikinci eşitliğin her iki tarafını ikiye bölmekle isbat edebiliriz:

Üç bilinmeyenli üç çizgisel eşitliğin çözümünde; iki defa eşitliklerden birini bir bilinmeyeni için çözeriz ve diğer iki eşitlikte yerine koruz. Bu iki eşitliği de daha evvel gördüğümüz iki bilinmeyenli iki eşitliğin çözümü metodunu kullanarak çözeriz.

(a) $x + y + z = 2$

(b) $2x - 2y - z = 2$

(c) $x + 2y - z = -3$

(a) eşitliğinden , $z=2-x-y$ yi (b) ve (c) de yerlerine korsak;

(b) $2x - \acute{e}y - 2 + x + y = 2$

(c) $x + 2y - 2 + x + y = -3$

Buradan da ;

(b) $3x - y = 4$ veya $y = 3x - 4$

(c) $2x + 3y = -1$

(b) yi , (c) de yerine korsak;

(c) $2x + 3(3x - 4) = -1$ veya $2x + 9x - 12 = -1$

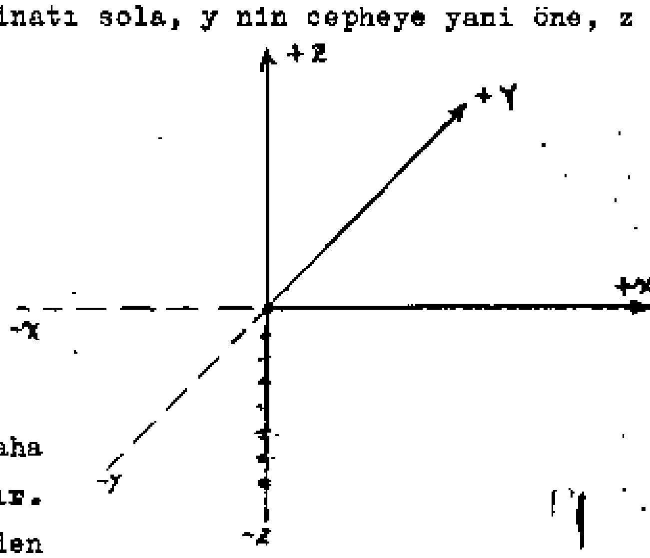
$11x = 11$ ve $x = 1$ i elde ederiz.

Bu çözümü (b) de yerine korsak ;

(b) $y = 3 . 1 - 4 = -1$ i elde ederiz. Bu iki kökü (a) eşitliğinde yerlerine koyalım:

(a) $z = 2 - 1 - (-1) = 2$ elde olunur.

Bu çözümler üç buğutlu bir koordinat sisteminde bir noktayı işaret ederler (1; -1 ; 2) . Bu koordinat sisteminde ekseriya x sağa, y arkaya, z de yukarı doğru çizilir. x in negatif koordinatı sola, y nin cepheye yani öne, z nin de aşağıya doğrudur.



9. EŞİTSİZLİKLER

Eşitlikte, eşitlik işaretinin solundaki terim, sağındaki terime eşittir diye ifade edildi. Eğer ifade, sol taraf sağ taraftan daha büyüktür diye olsa idi; " $>$ " işareti kullanılır dı. $a > b$ gibi. Bunun manası; a, b den daha büyüktür. Eğer sol taraf, sağ taraftan daha küçük ise; bu sefer işaret, ters olacaktır. Meselâ; $a < b$ gibi. Bunun manası; a, b den daha küçüktür. a, b den daha küçük olabilir veya b ye eşittir. O zaman $a \leqslant b$

işareti kullanılır. Eğer a, b ye eşit veya b den büyük ise; işareti ters çeviririz: $a \geqslant b$ gibi.

İki tip eşitsizlik vardır: MUTLAK EŞİTSİZLİKLER, harflerin ihtiva ettiği bütün kıymetler için muteberdir.

ŞARTA BAĞLI EŞİTSİZLİKLER : Yalnız, harflerin ihtiva ettiği bazı kıymetler için muteberdir. Meselâ; $(x - y)^2 \geqslant 0$, bir mutlak eşitsizliktir. Çünki; $x < y$ veya $x > y$ için de, karesi pozitiftir. Diğer taraftan, $x - 4 > 0$, yalnız $x > 4$ için doğrudur. Fakat; $x \leqslant 4$ için , eşitsizlik doğru değildir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafından ayni sayıyı çıkarsak veya her iki tarafına ayni sayıyı ilâve etsek, eşitsizliğin manası değişmez. Meselâ; $5 > 3$, ise; $5 + 4 > 3 + 4$ veya $5 - 4 > 3 - 4$ ki; $1 > -1$ dir; ayni manaları haizdirler.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı ayni sayı ile çarpılsa veya ayni sayıya bölünse; eşitsizliğin manası değişmez. Meselâ; $5 > 3$ ise; $5 \times 2 > 3 \times 2$ veya $5/2 > 3/2$ de ayni manayı haizdir.

Eğer, bir eşitliğin her iki tarafı ayni negatif bir sayı ile çarpılır veya ayni negatif bir sayıya bölünür ise; eşitsizlik değişir. Meselâ; $5 > 3$ ise; $5(-1) < 3(-1)$ veya $5/(-2) < 3/(-2)$ dir. Bir eşitsizliğin, her iki tarafının ayni derecen kökü alınırsa veya bir eşitsizliğin her iki tarafı ayni derecen bir üsse yükseltilir ise; o eşitliğin manası değişmez: $5^2 > 3^2$ veya $25 > 16$, $\sqrt{25} > \sqrt{16}$ dır.

Eşitsizliğin bir tarafındaki her hangi bir terim, ayni eşitliklerde olduğu gibi, diğer tarafa geçirilebilir.

Eğer iki eşitsizliğin manaları ayni ise; bölümlerinin de manalarının ayni olması gerekmez. Meselâ; $8 > 6$; $2 > 1$ ise; Bu iki eşitsizliğin bir birine bölümü; $8/2 \not> 6/1$ dir.

Bir bilinmeyenli bir eşitsizliğe sahip olduğumuz zaman, bu eşitsizliğin doğruluğu için bilinmeyeni çözebiliriz. Meselâ; $3x + 5 > x + 11$ ise; biz bunu bir eşitlikmiş gibi ele alabiliriz: $3x - x > 11 - 5$ veya $2x > 6$ dır. Buradan da $x > 3$ bulunur. $x = 3$ kıymeti için , eşitsizlik doğru çıkmaz. Çünki; $x=3$ kıymeti için; eşitsizliğin iki tarafı bir birine eşittir.

10. LOGARİTMA

Bir N sayısının a tabanına göre logaritması; x dir. Yani. N sayısını elde etmek için a tabanını x üssüne yükseltmek lâzımdır. $x = \log_a N$ dir. (Eğer a sıfırdan büyük ve sıfır veya 1 e eşit değil ise.) . Meselâ; $\log_2 8 = 3$ dür. Çünki; $2^3 = 8$ dir. Üslü çokluklara tatbik edilen kaidelerden görüyoruz ki; İki adedin çarpımını , bu iki adedin logaritmalarını toplamakla elde edebiliriz. Çünki; $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ dir. Bundan başka; iki sayının bir birine bölümü; bu iki sayının logaritmalarını bir birinden çıkartmak sureti ile elde edilebilir. Çünki; $a^m/a^n = a^{m-n}$ dir. Bu iki kaide şu şekilde yazılabilir:

1) $\log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a (M/N) = \log_a M - \log_a N$

Biz devam edelim; bir sayının k üssünün logaritması; k çarpı, o sayının logaritmasıdır.

Kök kesirli bir üs olduğuna göre; şunu da söyleyebiliriz: Bir sayının kökünün logaritması; o sayının logaritmasının, kökün derecesine bölümüne eşittir:

3) $\log_a M^k = k \cdot \log_a M$ 4) $\log_a \sqrt[n]{M} = 1/n \log_a M$ dir.

Logaritmalarda kullanılan iki taban vardır: e yi taban kabul eden logaritmaya TABİ LOGARİTMA denir., ve 2,7182 e eşittir. Umumiyetle daha ziyade BAYAĞI LOGARİTMA kullanılır ve tabanı 10 dur. Bu iki tip logaritmayı bir birinden şu yazılış farkı ile ayırt ederiz. Tabi logaritma için ln, bayağı logaritma için log işaretleri kullanılır. Logaritma tabloları ve bunların kullanışına ait talimatları ihtiva eden kitaplar mevcuttur.

10 tabanını kabul eden bayağı logaritmada; belirli bir yayı elde etmek için 10 tabanını nekadar bir üsse yükseltmek lazımdır sorusuna cevap bulunur. Meselâ; 10 un kendi logaritması 1 dir. Çünki; $10^1 = 10$ dur. log 1 = 0 dır. Çünki; $10^0 = 1$ dir. $\log 1000 = \log 10^3 = 3$ tür. Çünki; $10^3 = 1000$ dir. Buna benzer olarak; $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3$ tür.

Bütün logaritmalar, bir birim sayı çarpı 10 un her hangi bir üslüsü şeklinde ifade edilebilirler. 10 un üssü karekteristik, birim sayı da mantisadır. Meselâ; 432 sayısının logaritması şu şekilde bulunmuştur. $\log 4{,}32 \times 10^2$, 4,32 nin logaritması 0,6355 e eşittir ve $\log 10^2 = 2{,}0$ dır. Buradan $\log 432 = 2{,}6355$ dir. Buna benzer olarak; $\log 0.0215 = \log 2{,}15 \times 10^{-2} = \log 2{,}15 + \log 10^{-2} = 0.3324 + (-2)$ dir. Bu ekseriya 8,3324 - 10 şeklinde yazılır.

Aşağıda bir kaç misal verilmiştir :

1) $\sqrt[3]{11(0{,}02)^2}$ yi hesap etmek için ; bunu logaritmaya ayıralım:

$1/3 \left[\log 1{,}1 + \log 10 + 2\,(\log 2{,}0 + (-2) \log 10)\right] =$

$1/3\,(0{,}0414 + 1 + 2 \cdot 0{,}3010 - 4 \cdot 1) = 1/3(0{,}6434 - 3) = 0{,}2145-1$ Bunun antilogaritmasını tablodan bulalım: $1{,}64 \times 10^{-1} = 0{,}164$ dür.

2) $(0{,}0023)^{-1/5}$ in logaritması; $-1/5(\log 2{,}3 + \log 10^{-3}) = -1/5(0{,}3617-3)$ dür. -3 ü kalansız olarak 5 e bölebilmek için; 0,3617 ve 3 e lüzumlu rakamı ilâve etmemiz gerekir: $-1/5(2{,}3617-5) = -0{,}4723+1 = 0{,}5277$ bulunur. Bunun antilogaritması; 3,371 dir.

3) $0{,}03575^{-0{,}16}$ nın logaritmaya göre sıralanışı; $-0{,}16(\log 3{,}575 - 2) = -0{,}16\,(0{,}5533-2)$ dir. Çarpımı yapacak olursak; $-0{,}08853 + 0{,}32 = 0{,}23147$ bulunur. Bunun antilogaritması: 1,704 dür.

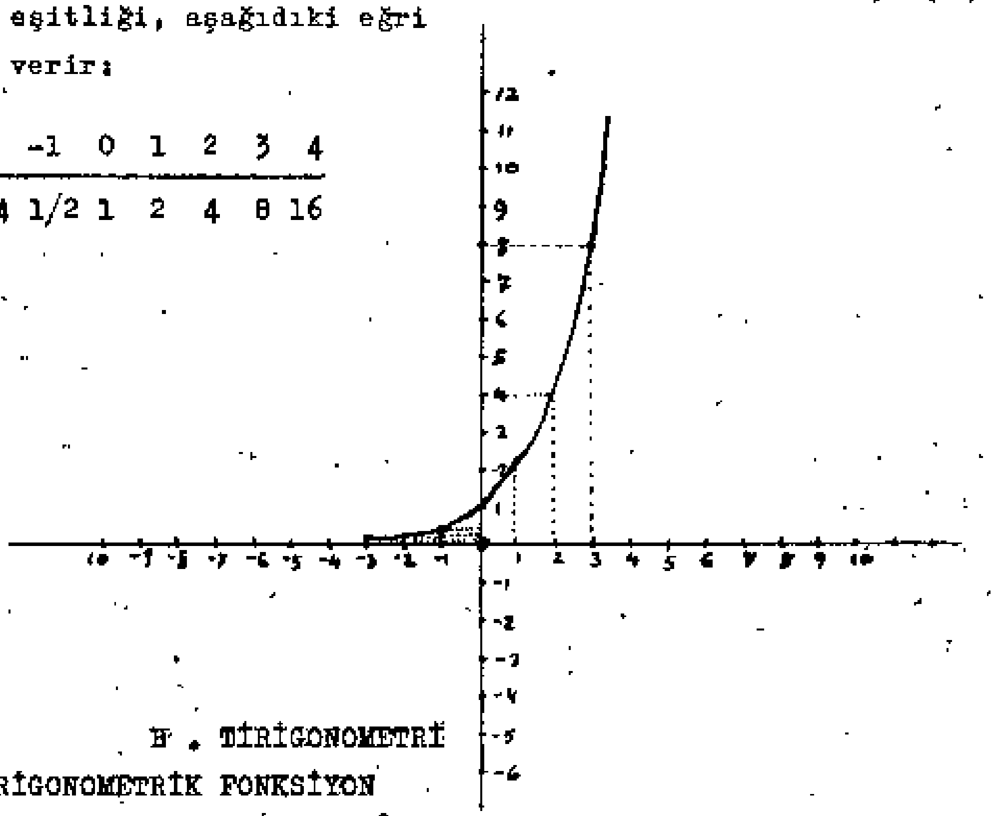
4) $0{,}0125^{1/7}$. Bunun logaritması: $1/7\,(\log 1{,}25 - 2)$ dir. 10 üssünü 7 ye bölebilmek için iki kısma da 9 ilâve etmeliyiz. $1/7\,(0{,}0969 - 2) = 1/7\,(9{,}0969 + 7) = 1{,}2995 + 1 = 0{,}2995 + 2$ veya 2,2995 dir. Bu sayının antilogaritmasını bulalım; Burada yalnız, mantisanın karşılığını bulacağız. Baştaki 2 rakamı, sayının 3 haneli tam adede haiz olduğunu işaret eder ve netice 199,3 olarak bulunur.

Adeti vechile, sıfırdan küçük logaritmalar, şu şekilde yazılırlar: 0,2468-2 şöyle yazılabilir; 8,2468 - 10 yahut 0,0457 - 3 şöyle yazılabilir; 6,0457 - 10 . Virgülden sonra gelen rakamlar değişmez. Bunun manası; biribirini takip eden rakam-

1 = log 10 olduğundan; $x / (x - 9) = 10$ yazılabilir. Sonra $x = 10x - 90$ ve $9x = 90$, buradan da $x = 10$ dur.

Üslü eşitlikler, dik koordinat sisteminde birer eğri temsil ederler. Bu eğriler de , üslü eşitliklerin görünüşlerinin karekteristiğidirler. Misal; $y = 2^x$ üslü eşitliği, aşağıdaki eğri noktalarını verir:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16



B . TİRİGONOMETRİ

1. TİRİGONOMETRİK FONKSİYON

Bir dik üçgen, bir açısı 90° olan üç kenarlı bir şekildir. Her üçgenin iç açıları toplamı 180° olduğuna göre; bir dik üçgenin diğer iki açısı 90° dir. Dik açının karşısındaki kenara hipotenüs denir. Muhtelif kenarların oranları hususi isimlere haizdir ve aşağıdaki gibi mühim trigonometrik fonksiyonları temsil ederler: Sinüs (sin olarak kısaltılmıştır.)

Bir açının sinüsü $= \dfrac{\text{Karşısındaki kenar}}{\text{Hipotenüs}}$ dür.

Bir açının kosinüsü (cos) $= \dfrac{\text{Yanındaki kenar}}{\text{Hipotenüs}}$ dür.

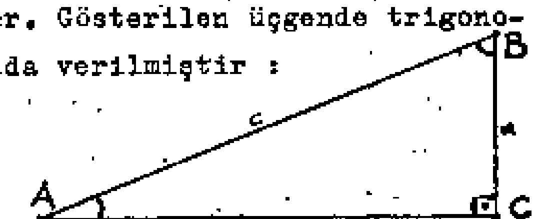
Bir açının tanjantı (tan veya tg) $= \dfrac{\text{Karşı kenar}}{\text{Yanındaki kenar}}$ dır.

Bir açının kotanjantı (cot veya ctg) $= \dfrac{\text{Yanındaki kenar}}{\text{Karşı kenar}}$ dır.

Bir açının sekantı (sec) $= \dfrac{\text{Hipotenüs}}{\text{Yanındaki kenar}}$ dır.

Bir açının kosekantı (cosec veya csc) $= \dfrac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı kenar}}$ dır.

Bu tarifler sık sık geçtiğinden, ezberlenmelidirler. Gösterilen üçgende trigonometrik fonksiyonlar kenarların harfleri ile, aşağıda verilmiştir :



$\sin A = a/c$; $\cos A = b/c$; $\tan A = a/b$;
$\operatorname{ctg} A = b/a$; $\sec A = c/b$; $\csc A = c/a$.

Bu tariflerden, aşağıdaki bağıntıları görebiliriz:

$\tan A = 1/\operatorname{ctg} A$, $\sec A = 1/\csc A$, $\csc A = 1/\sin A$, $\operatorname{ctg} A = 1/\tan A$, $\sin A = 1/\csc A$ ve $\cos A = 1/\sec A$ dır.

Pisagor teoremine göre; bir dik üçgende hipotenüsün karesi, diğer iki kenarın karelerı toplamına eşittir. $c^2 = a^2 + b^2$ dir. Bu eşitlikten istifade ederek; bir dik üçgenin iki kenarı biliniyorsa, üçüncü kenarı bulabiliriz. Ayni zamanda, bir üçgenin kenarları arasındaki oran; $3:4:5 = a:b:c$ ise; bu üçgen dik üçgendir. Çünki; $3^2 + 4^2 = 5^2$ dir.

Biz şunu da görüyoruz ki; $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ dir. Çünki; $a^2/c^2+b^2/c^2=c^2/c^2=1$ dir. Eğer iki açının toplamı 90° ise; bu açılara tamamlayıcı açılar denir. Bir dik üçgenin iki dar açısı biribirini tamamlayan (tamamlayıcı) açılardır.

Şekilde görülen üçgenin B açısının fonksiyonları şunlardır :

$\sin B = b/c$, $\tan B = b/a$, $\cos B = a/c$, $\mathrm{ctg}\, B = a/b$, $\sec B = c/a$, $\csc B = c/b$.

Bunları B açısının tamamlayıcısı olan A açısının fonksiyonları ile mukayese edecek olursak; şunu görürüz:

$\sin A = \cos B$, $\cos A = \sin B$, $\cot A = \tan B$, $\tan A = \cot B$, $\sec A = \csc B$ $\csc A = \sec B$ dir.

Yukarıdaki eşitliklerden anlaşılıyor ki; bir açının tirigonometrik fonksiyonu, o açının tamamlayıcısının karşıt fonksiyonuna eşittir . Yani $B = (90^\circ - A)$ olduğundan ;

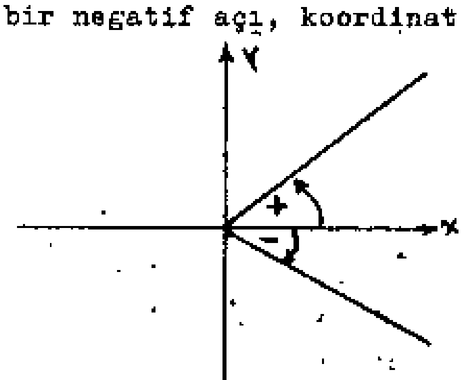
$$\sin A = \cos (90^\circ - A) , \quad \cos A = \sin (90^\circ - A)$$
$$\tan A = \cot (90^\circ - A) , \quad \cot A = \tan (90^\circ - A)$$
$$\sec A = \csc (90^\circ - A) , \quad \csc A = \sec (90^\circ - A)$$

Bu özdeşiklerle , bir fonksiyon verilmişse; diğerlerini tayin edebiliriz. Meselâ: $\cot A = 3/4$ ise; $\cot A = b/a$ olduğundan; biz görüyoruz ki; $b=3$ ve $a=4$ dür. Buradan; $c^2=a^2+b^2=16+9=25$ ve buradan $c=5$ neticesini buluruz. Böylece; $\sin A =4/5$, $\cos A = 3/5$, $\tan A = 4/3$, $\sec A = 5/3$, $\csc A = 5/4$ dür.

Genel olarak, bir tirigonometrik fonksiyon ve bir kenar veya iki kenar verilirse; diğer kenar ve fonksiyonlar tayin edilebilir.

Tirigonometrik fonksiyonlar 0° den 45° ye kadar, tablolarda bulunur. 45°den 90° ye kadar olan açıların tirigonometrik fonksiyonları için ayni tablo kullanılır. Bunların tersi, karşıt fonksiyonlar içindir. Bütün hesaplar, daha ziyade logaritma kullanılarak yapıldığından, tirigonometrik fonksiyonların logaritmalarının da tabloları mevcuttur.

90° den büyük ve negatif açıların tirigonometrik fonksiyonları, aşağıdaki tablolardan elde edilebilir. Şunu da hatırlatalım ki; bir negatif açı, koordinat sistemine göre tarif edilir: Pozitif x te açılıp, negatif y ye doğru , saat yelkovanı istikametindeki açıya negatif açı denir. x in pozitif tarafında açılıp, y nin pozitif tarafına doğru saat yelkovanının aksi istikametindeki açıya da pozitif açı denir. Coğrafyada da, Kuzey Yarımküresindeki enlemlere pozitif açılar, Güney Yarımküresindekilere de; Negatif açılar denir.



Biz bu tabloda, yalnız ana fonksiyonlardan (sin, cos, tan, cot.) bahsedeceğiz. Sec ve csc ilk iki fonksiyonun tersi olarak bulunur.

90° DEN BÜYÜK AÇILARIN TİRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI İÇİN TABLO.

	-a	90°- a	90°+ a	180°- a	180°+ a	270°- a	270°+ a	360°- a	360°+ a
sin	-sin a	cos a	cos a	sin a	-sin a	-cos a	-cos a	-sin a	sin a
cos	cos a	sin a	-sin a	-cos a	-cos a	-sin a	sin a	cos a	cos a
tan	-tan a	ctg a	-ctg a	-tan a	tan a	ctg a	-ctg a	-tan a	tan a
ctg	-ctg a	tan a	-tan a	-ctg a	ctg a	tan a	-tan a	-ctg a	ctg a

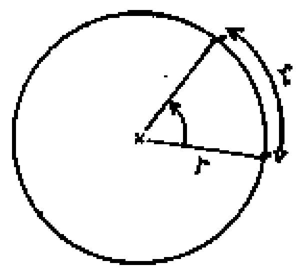
ÖNEMLİ BAZI AÇILARIN TİRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI

Derece	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radyan		$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3/2\,\pi$	2π
sin	0	1/2	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$	1	0	-1	0
Cos	1	$1/2\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	1/2	0	-1	0	1
tan	0	$1/3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0
Cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/3\sqrt{3}$	0	$-\infty$	0	∞

2. RADYAN BİRİMİ VE DERECEYE TAHVİLİ

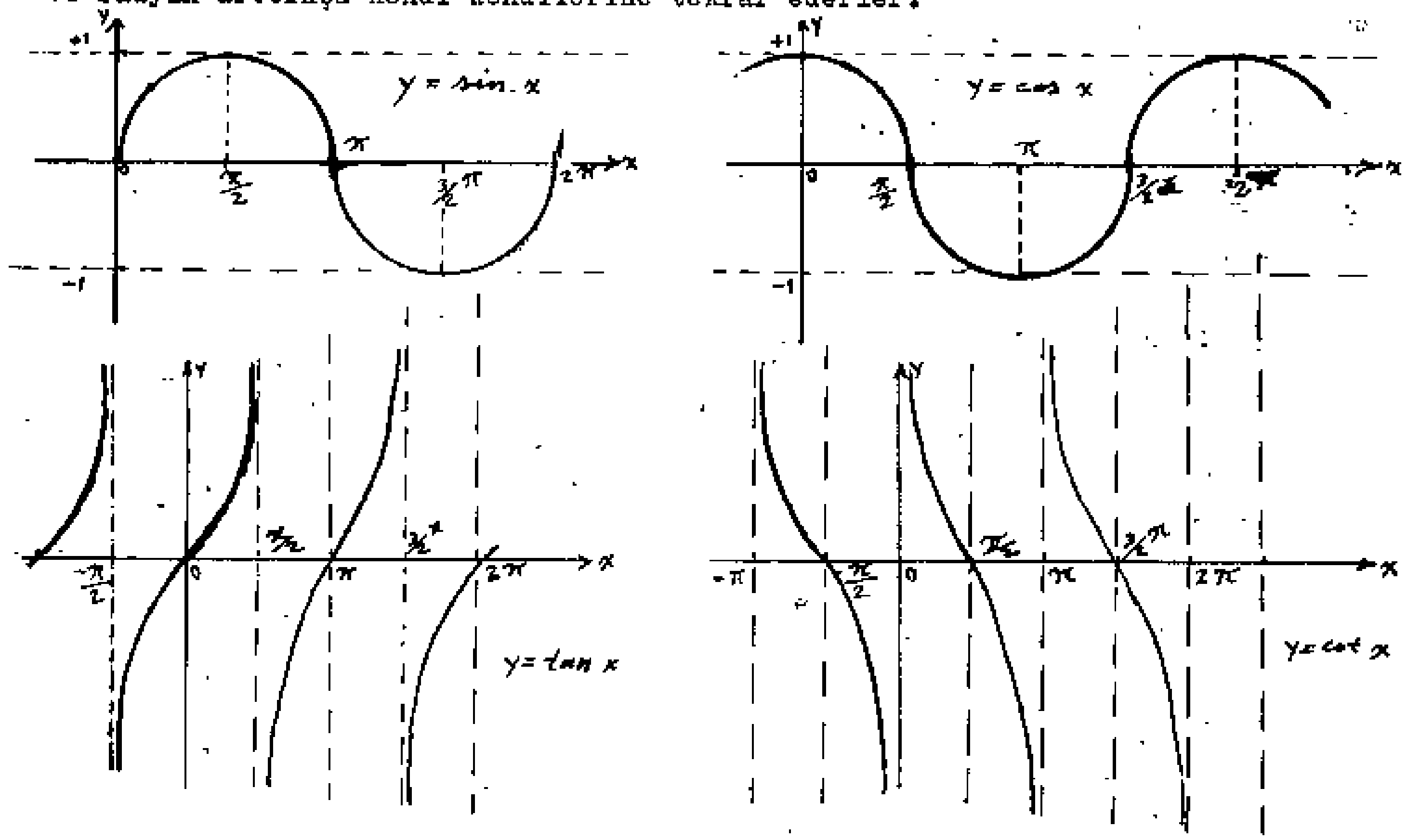
Bir radyan, yarıçap uzunluğundaki daire yayını gören merkez açısına denir. Bir dairenin çevresi $2\pi r$ dir. Burada r dairenin yarıçapıdır, ve π=3,14159 dur, veya kabaca π=3,1416 dır. Tam bir dairenin merkez açısı 360°= 2π radyandır. Bundan dolayı 1°= $\pi/180$ radyan = 0,017453 radyandır. Bunun tersi, 1 radyan=$180/\pi$ derece= 57,2958° dir. Meselâ; 180° = π radyan = 3,1416 radyandır. Daha küçük açı birimlerine tahvil aşağıdadır:

1 derece = 0,01)4533 radyan
1 dakika = 0,0002909 radyan
1 saniye = 0,00000484814 radyan
1 radyan = 57° 17' 45"
1 radyan = 3437' 45"
1 radyan = 206264,80625" dir.



3. TİRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GEOMETRİK ŞEKİLLERİ

Eğer biz, değişen açıyı, radyan cinsinden x ile gösterirsek; $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, ve $y = \cot x$ fonksiyonlarını çizebiliriz. Aşağıdaki grafikte bu fonksiyonlar çizilmiştir. Görülüyor ki; bütün bu fonksiyonlar, periyodiktirler ve radyan arttıkça kendi kendilerine tekrar ederler.



4. TİRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR ARASINDAKİ BAĞINTI

Trigonometrik faonksiyonları haiz denklemlerin çözümü için, ve çözümü kolaylaştırmakta fonksiyonların şeklini değiştirmek lüzumludur. En mühim bağıntılar ve esas özdeşikler, aşağıda, isbatsız olarak, bildirilmiştir:

I. TERS BAĞINTILAR :

a) $\tan\alpha = 1/\cot\alpha$, b) $\cot\alpha = 1/\tan\alpha$, c) $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$, d) $\csc\alpha = 1/\sin\alpha$

II. BÖLÜM BAĞINTILARI :

a) $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ b) $\cot\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha$

III. PİSAGOR TEOREMİ BAĞINTILARI :

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, b) $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, c) $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$

IV. TOPLAM FORMÜLLERİ :

a) $\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta$

b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

c) $\tan(\alpha \pm \beta) = (\tan\alpha \pm \tan\beta) / (1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta)$

d) $\cot(\alpha \pm \beta) = (\cot\alpha\cot\beta \mp 1) / (\cot\beta \pm \cot\alpha)$

V. ÇİFT AÇI BAĞINTILARI

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, b) $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2) \cdot \cos(\alpha/2)$

c) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, d) $\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$

e) $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$, f) $\tan 2\alpha = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$

g) $\tan\alpha = 2\tan(\alpha/2)/(1-\tan^2(\alpha/2))$, h) $\cot 2\alpha = (\mathrm{ctg}^2\alpha - 1)/2\mathrm{ctg}\alpha$

i) $\mathrm{ctg}\alpha = (\mathrm{ctg}^2(\alpha/2)-1)/2\mathrm{ctg}(\alpha/2)$, j) $\tan\alpha = \sqrt{(1-\cos 2\alpha)/(1+\cos 2\alpha)} = \sin 2\alpha/(1+\cos 2\alpha)$
$= (1-\cos 2\alpha)/\sin 2\alpha$.

VI. FONKSİYONLARIN TOPLAMI VE FARKI

a) $\sin\alpha + \sin\beta = (2\sin(\alpha+\beta)/2)\,(\cos(\alpha-\beta)/2)$

b) $\sin\alpha - \sin\beta = (2\cos(\alpha+\beta)/2)(\sin(\alpha-\beta)/2)$

c) $\cos\alpha + \cos\beta = (2\cos(\alpha+\beta)/2)(\cos(\alpha-\beta)/2)$

d) $\cos\alpha - \cos\beta = (-2\sin(\alpha+\beta)/2)(\sin(\alpha-\beta)/2)$

e) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\,.\,\sin(45^\circ+\alpha)$

f) $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\,.\,\cos(45^\circ+\alpha)$

g) $(1+\tan\alpha)\ (1-\tan\alpha) = \tan(45^\circ+\alpha)$

h) $(\mathrm{ctg}\alpha + 1)(\mathrm{ctg}\alpha - 1) = \mathrm{ctg}(45^\circ-\alpha)$

i) $\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{tg}\alpha = 2/\sin 2\alpha$.

k) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha = 2\mathrm{ctg}2\alpha$.

l) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

m) $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

n) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

o) $2\sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

5. BİR BİLİNMEYENLİ TİRİGONOMETRİK DENKLEMLER

Tirigonometrik fonksiyonlar periyodiktirler. Bundan dolayı tirigonometrik fonksiyonları haiz denklemler, sonsuz sayıda köklere sahiptirler. Genel olarak, yalnız 0°ile 360° (pozitif) arasındaki kökler enteresandırlar. Denklemde bir fonksiyondan fazla fonksiyon varsa; eşitliği yalnız bir fonksiyonlu şekle sokmak için, diğer fonksiyonları kullanılacak tek bir fonksiyona çevirmek lâzımdır. Aşağıda birkaç misal verilmiştir :

a) $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = 1/2$ dir. Buradan $x = 30^\circ$ ve 150° bulunur.

b) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ Denklemi, iki köklü denklemlere ait formül kullanılarak veya çarpanlarına" ayrılarak çözülebilir: $\cos x = (1 \pm \sqrt{1+8}\,)/4$

$\cos x = 1$ veya $-1/2$ dir. Buradan $x = 0^\circ$ veya 120° yahutta 240° olarak bulunur. Çarpanlarına ayırarak çözecek olursak; ayni neticeyi buluruz:

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$ Her bir parantez içini sıfıra eşit kılacak olursak: $\cos x = 1$ veya $-1/2$ buluruz ki; yukarıdaki kökler aynen elde edilmiştir.

İki farklı fonksiyonu haiz denklemlerin çözümünde; denklem, ya çarpanlarına ayrılır ve her çarpan sıfıra eşit kılınarak kökler bulunur yahutta bütün denklemin farklı fonksiyonları tek fonksiyona çevrilir:

$\sin x \sec^2 x - 2\sin x = 0$; $\sin x(\sec^2 x - 2) = 0$; $\sin x = 0$ buradan da $x = 0^\circ$ veya 180°dir, ve $\sec^2 x = 2$; $\sec x = \pm\sqrt{2} = 1/\cos x$ dir. Böylece;

$\cos x = \pm 1/2\sqrt{2}$ ve $x = 45^\circ$; 135° ; 225° ; 315° dir.

İHTAR : Tirigonometrik eşitlikleri tek fonksiyona çevirirken şunu not etmeliyiz ki; bilinmeyenli terimin karesini alırken veya her iki tarafı bilinmeyenli bir fonksiyona bölerken fazla kökler husüle gelir. Bundan dolayı; bütün kökler orijinal denklemde kontrol edilmelidirler ve eşitliğe uymayanlar atılmalıdırlar. Eşitliğin her iki tarafını bilinmeyenli bir fonksiyona bölerken kök kaybolabilir. Bundan dolayı; böyle bir bölümden kaçınılmalıdır.

$2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ eşitliğini kullanarak ; $2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ ı elde ederiz. Biz bunu çarpanlarına ayırabiliriz:

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = -1/2$ ve $\cos x = 1$ dir. Buradan $x = 120°$; $240°$ ve $0°$ bulunur.

Aşağıdaki diğer bir misal, eşitliğin her iki tarafının karesinin alınması neticesi, fazla köklerin husüle gelişini göstermektedir:

$\sin x + 1 = \cos x$ de $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ eşitliğini yerine korsak;

$(\sin x + 1)^2 = 1 - \sin^2 x$ veya $\sin^2 x + \sin x = 0$ ve $\sin x (\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 0$ ve $\sin x = -1$ den kökler: $x = 0°$ ve $180°$, yine $x = 270°$ bulunur. Fakat; $x = 180°$ kökünü eşitlikte yerine korsak, uymadığını görürüz.

Eksik köklü bir denkleme misal aşağıda gösterilmiştir:

$\csc x \tan x = \tan x$ Eğer her iki tarafı $\tan x$ e bölecek olursak; $\tan x = 0$ kökünü buluruz, ve $\csc x = 1$ kalır. Buradan $x = 90°$ ve kaybolmuş iki kök neticesi veren tam $x = 0$ la $x = 0°$ ve $180°$ elde edilir.

6. ÜÇGENLER İÇİN ÇÖZÜMLER

Şunu ilk defa işaret edelim ki; Pisagor teoreminin logaritmik çözümünün şekilleri:

$a = \sqrt{(c+b)(c-b)}$ ve $b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$ dır.

Bu eşitlikler hesabı kolaylaştırırlar. Çünki; toplam ve fark kolayca hesap edilir, geri kalan işlem logaritma ile yapılır.

Aşağıdaki eşitlikler, her hangi bir üçgende bilinmeyen kemmiyetlerin çözümünde kullanışlıdırlar ;

a) KOSİNÜS KANUNU: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ Ayni eşitlik diğer kenarlar için de doğrudur. Her hangi bir kenarın karesi; diğer kenarların karelerinin toplamından, bu iki kenar ve aralarındaki açının kosinüsü çarpımının iki katının çıkarılmasına eşittir.

b) SİNÜS KANUNU : Her hangi bir üçgende, her hangi iki kenar, karşısındaki açıların sinüsleri ile orantılıdırlar : $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$ dir.

Bundan dolayı, iki kenar ve bir açı verilmiş ise; diğer kenar ve diğer iki açı tayin edilebilir. Yahut, iki açı ve bir kenarla diğer kemiyetler tayin edilebilirler.

c) TANJANT KANUNU : Her hangi bir üçgende, her hangi iki kenar arasındaki farkın bu kenarların toplamına bölümü, karşılıklı açıların farkının yarısının tanjantının yine karşılıklı açıların toplamlarının yarısının tanjantına bölümüne eşittir:

$(a-b)(a+b) = (\tan 1/2 (a-b)) / (\tan 1/2 (a+b))$ dir.

d) ÜÇGENİN ALANI

Bir üçgende, iki açı ve bir kenar verildiğinde; üçüncü açı hesap edilebilir. Çünki; Bir üçgende iç açılar toplamı $180°$ dir. Bir üçgenin alanı $A = a^2 \sin b . \sin c / 2 \sin a$ dır. Diğer b ve c kenarları için de; benzer formül kullanılır. İki kenar ve aralarındaki açı verildiği zaman: $A = (b.c \sin a)/2$ veya $A = (a.c.\sin b)/2$ vesairı yazılabilir. Üç kenar verildiğinde; $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dir. Burada $s = 1/2 (a+b+c)$ dir. Üçgenlerin çözümü, bilhassa vektörler toplami ve çıkarılmasına tatbik edilir ki; bunlar bir veya daha fazla üçgenleri ihtiva ederler.

7. TERS TİRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Arksin x şeklinde gösterilme, bir açıyı işaret eder ve bu açının sinüsü x dir. Eğer x= sin y ise; y= arksin x dir. Burada, sin y ve arksin x ters fonksiyonlardır diyoruz. Arksin x bir açıdır. Bunun yerine ekseriya şu işaret kullanılır: $\sin^{-1}x$. Bu işarette -1 , üssü göstermez. Meselâ; eğer biz arksin 1/2 yi bulmuşsak, sinüsü 1/2 olan açıları bulmamız lâzımdır. Bu açılar 30° ve 150° dir. Çünki; bu iki açının sinüsü de 1/2 dir. Buna benzer olarak ; arktan $(-\sqrt{3})$ ü de bulabiliriz: $y=\text{arktan}(-\sqrt{3})$ dür. Böylece, $\tan y = -\sqrt{3}$ buradan da $y = 120^\circ$ ve 300° dir. sin(arkcos 4/5) i bulmak istersek; z = arkcos 4/5 i tanzim edebiliriz. Buradan da, $\cos z = 4/5 = 0{,}80$ dir. Bunun neticesi de; $z = 36^\circ\,52'$ dır. $\sin 36^\circ\,52' = 0{,}6$ dırki; sin(arkcos 4/5) in değeridir. Genel olarak, bizi alâkalandıran yalnız esas kıymetlerdir. Bunlar da; arksin x , arkcos x , arktan x, arkcot x, arksec x, ve arkcsc x in en küçük kıymetleridir.

a) $\text{arkcot}\sqrt{3} = 30^\circ$; b) arksin $0{,}0378 = 2^\circ\,10'$;c) arktan $1 = 45^\circ$; d) $\tan^{-1}(-1)=-45^\circ$
e) $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) = 150^\circ$ gibi.

C. ANALİTİK GEOMETRİ

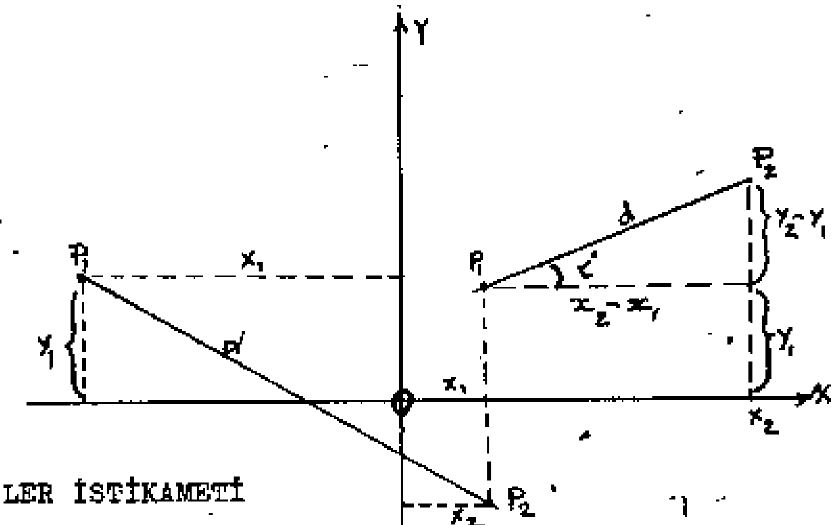
1.Dik koordinat sisteminde , x ve y li iki buğutta bir nokta $P_1(x_1;y_1)$, x_1 ve y_1 koordinatlarını haizdir. Bu mevzu A-8 kısmında izah edilmişti. Eğer, ikinci $P_2(x_2;y_2)$ noktasına da sahipsek; bu iki nokta arasındaki mesafe, Pisagor teoremine göre, tayin edilebilir.

$$(P_1P_2)^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \text{ dir.}$$

Meselâ; iki nokta (3;-1) ve (-4;-2) olsun. Bu iki nokta arasındaki mesafe;

$$d=\sqrt{(3+4)^2+(-1+2)^2} = 5\sqrt{2} \text{ dir.}$$

İlk olarak hangi nokta alınırsa alınsın , her hangi bir fark olmaz, netice yine aynıdır.



2. EĞİM , MEYİL VE KOSİNÜSLER İSTİKAMETİ

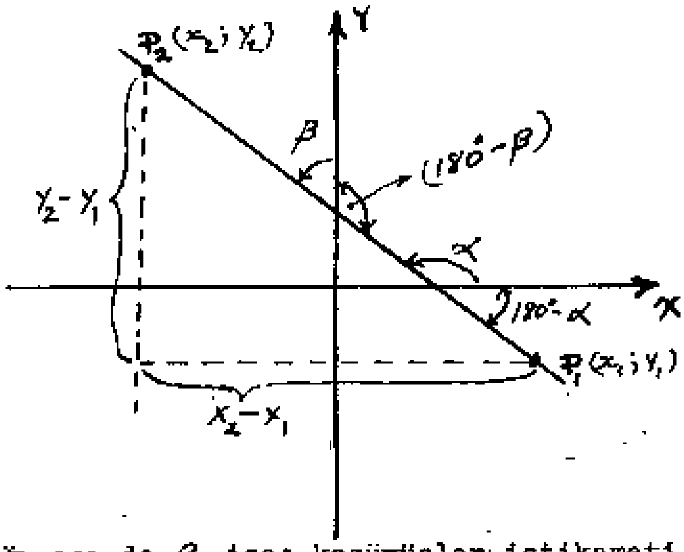
i açısı, saat yelkovanının aksi istikametinde, eksenin pozitif tarafından bir doğruya doğru olan açıdır, ve bu açıya doğrunun eğimi denir. Bu açının tanjantına ise;(tan i = m) doğrunun meyili denir.

Evvelki şekilde P_1P_2 nin meyili:

$$m = \tan i = (y_2-y_1)(x_2-x_1) \text{ dir.}$$

Bu formülün neticesi de yine; noktaların birbirini takip sırasına tabî değildir.

KOSİNÜSLER İSTİKAMETİ, aşağıdaki gibi tarif edilir: P_1den P_2 ye doğru istikameti olan bir doğruya (bir vektör gibi.) sahipsek; ve bu doğrunun x ekseninin pozitif tarafı ile yaptığı açı α , y ekseninin pozitif tarafı ile yaptığı açı da β ise; kosinüsler istikameti;



$\lambda = \cos\alpha$ ve $\mu = \cos\beta$ dır.

Doğrunun istikameti ters olduğu zaman; α ve β açıları, kendi temamileri ($180 - \alpha$) ve ($180 - \beta$) olacaktır. Eğer d iki nokta arasındaki mesafe ise; kosinüsler istikameti, şuradan tayin edilebilir:

$\cos\alpha = (x_2 - x_1) / d$ ve $\cos\beta = (y_2 - y_1) / d$

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ olduğuna göre; bu iki kosinüsün karelerini birbirine ilâve edecek olursak;

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \lambda^2 + \mu^2 = 1$$ bulunur.

x eksenine paralel bir doğrunun kosinüsler istikameti : $\lambda = \pm 1$; $\mu = 0$,
y eksenine paralel bir doğrunun kosinüsler istikameti ise; $\lambda = 0$; $\mu = \pm 1$ dir.

3. DİKLİK VE PARALELLİK DURUMLARI

Eğer iki doğru, ayni manayı haiz ise; yani vektörlerde olduğu gibi, ikisi de ayni istikamette ise; ve meyilleri de ayni ise; bu iki doğru birbirine paraleldi ve kosinüsler istikametleri de aynidir. Eğer iki doğru, zıt manada paralel iseler; (bunlara antiparalel de denir.) ayni meyile sahiptirler. Fakat; doğrulardan birinin kosinüsler istikameti, diğer doğrunun kosinüsler istikametinin negatif işaretlisine eşittir. Çünki istikamet farkı 180° dir.

Eğer iki doğrudan birinin eğimi, diğerinin eğiminin tersinin negatif işaretlisine eşit ise; bu iki doğru birbirine diktir. Eğer bir doğrunun eğim açısı i_1, diğer doğrunun ki $i_2 = 90^\circ + i_1$ ise; meyil; $m_1 = \tan i_1$ ve $m_2 = \tan i_2 = \tan(90 + i_1) = -\cot i_1 = -1/\tan i_1 = -1/m_1$ dir. Birbirine dik iki doğrunun kosinüsler istikameti;

λ_1 , μ_1 ve λ_2 , μ_2 dir. Paralel durumunda; $\lambda_1 = \pm\mu_2$ ve $\mu_1 = \mp\lambda_2$ idi.

Buradan görüyoruz ki; kosinüsler istikametinin çarpımlarının toplamı sıfıra eşit olmalıdır ki; iki doğru birbirine dik olsun; $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0$

Bu bir evvelki özdeşik , burada yerine konulmak sureti ile isbat edilebilir.

Üç buğutlu durumlarda, üçüncü kosinüsler istikameti takımı ve diklik durumu ayni olacaktır. Yalnız, bu ikisinin çarpımı da ilâve edilmelidir;

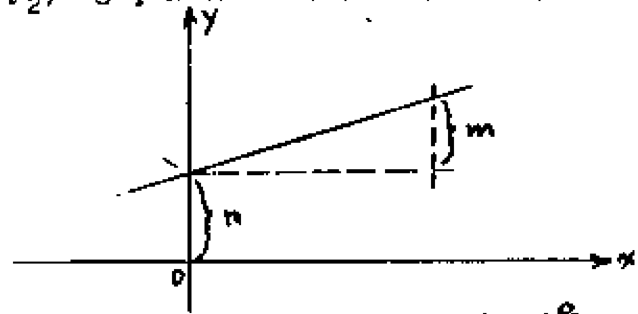
$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$ dır.

4. ÇİZGİSEL DENKLEMLER

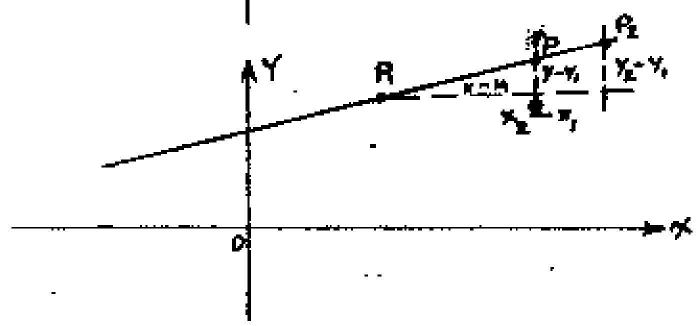
Çizgisel denklemlerin genel şekli: $ax + by + c = 0$ dır. Bu eşitlik şu şekle sokulabilir; $y = mx + n$. Yalnız burada; $m = -a/b$ ve $n = -c/b$ olduğu kabul edilmelidir. m değeri, doğrunun eğimidir, ve n kıymeti ise; doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır. Burada $x = 0$ dır. Doğrunun y ekseni ile kesişme noktasının koordinatları(0 ; n) dir.

Bir doğruyu iki noktadan $P_1(x_1; y_1)$ ve $P_2(x_2; y_2)$ geçen bir hat olarak ifade edebiliriz. Bu doğru üzerindeki her hangi bir nokta $P(x;y)$, eşitliği sağlar:

$(y-y_1) / (x-x_1) = (y_2-y_1) / (x_2-x_1)$ dir.



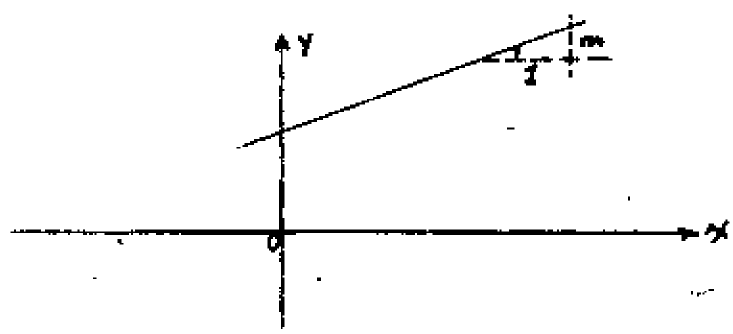
$m = (y_2-y_1) / (x_2-x_1)$ olduğuna göre; bu eşitlik, nokta-meyil şekline irca edilebilir: $y-y_1 = m(x-x_1)$ dir. Bu eşitlik, bir noktası ve eğimi verilen bir doğrunun denklemidir. Eğer doğrunun x ve y eksenleri ile kesiştiği noktaların koordinatları $(0;n)$ ve $(q;0)$ dır.



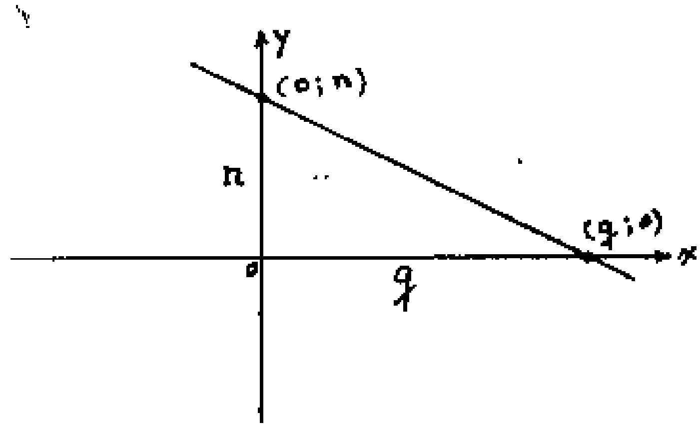
Bir doğrunun denklemi, şu şekilde de kabul edilmiştir ki;

$x/q + y/n = 1$

ayni denklem, iki-nokta denklemidir, ve bu noktalar; $x_1=0$, $x_2=q$, $y_1=n$ ve $y_2=0$ dır.



Çizgisel denklemlerin genel şekline göre; $q=-c/a$, $n=-c/b$ dir. Çizgisel denklemlerin normal şekli, aşağıdaki gibi bulunur: Koordinat sistemi orijininden geçen ve verilen s doğrusuna dik olan doğru parçasına OA dersek; bu doğrunun x ekseni ile yaptığı açı θ, ve uzunluğu da r olsun. Bu s doğrusu, θ açısı ve r çevresi ile tayin edilebilir.



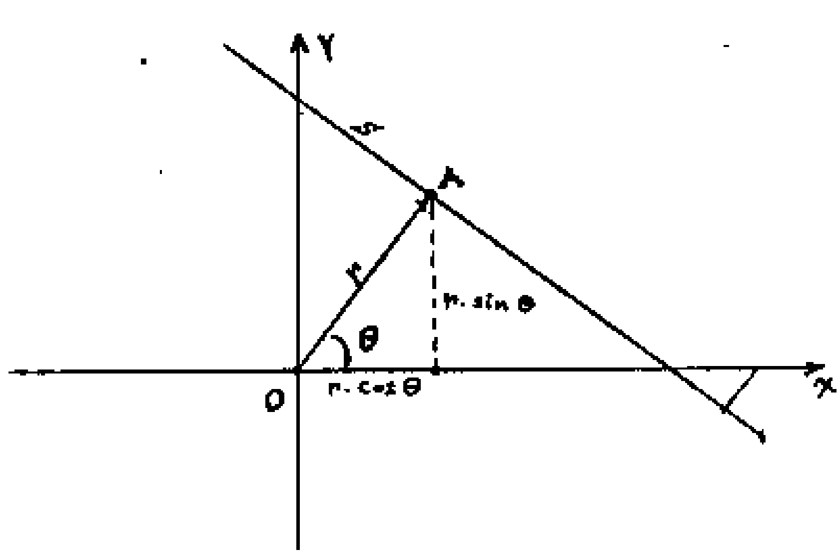
A noktasının koordinatları; $A(r\cos\theta \,;\, r\sin\theta)$ dır. s doğrusu, eğimi $\tan\theta$ olan OA ya dik olduğuna göre; s doğrusunun eğimi $-\cot\theta$ dır. Biz burada bir doğrunun nokta-meyil şeklindeki denklemini kullanabiliriz.

$y-r.\sin\theta = -\cot\theta\,(x-r.\cos\theta)$ veya şu şekle irca edebiliriz:

$x\cos\theta + y.\sin\theta - r = 0$ dır.

x ve y nin kat sayıları, s ye dik (normal) olan doğrunun kosinüsleri istikametidir (λ ve μ gibi .). Burada eşitlik, şu şekilde yazılabilir:

$\lambda x + \mu y - r = 0$ dır.



O orijinin s den uzaklığı r dir. İki eşitliği birbiri ile mukayese edecek olursak;

$\lambda x + \mu y - r = 0$

$Ax + By + C = 0$ (Genel şekil)

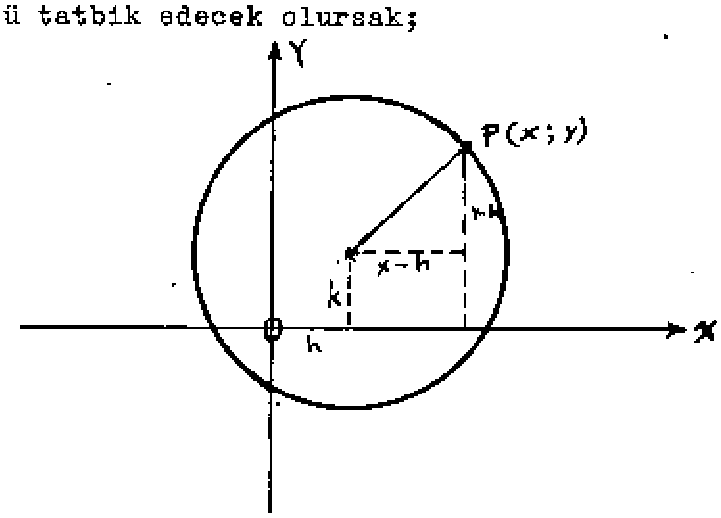
Burada şunu görüyoruz ki; A ve B katsayıları, yukarıdaki denklemin temsil ettiği doğrunun kosinüsler istikametidir.

Bir noktadan bir doğruya olan mesafe, şu eşitlikle tayin edilebilir:

$d = \lambda x_1 + \mu y_1 - r$ dir. Burada x_1 ve y_1 noktanın koordinatlarıdır ve λ, μ, r kıymetleri ise; verilen doğrunun Normal Şekil Denkleminden elde edilebilir.: $\lambda x + \mu y - r = 0$ dir.

5. DAİRE

Farzedelim ki; bir P(x;y) noktası, sabit bir noktadan r uzaklığında, sabit bir hızla bir yüzey üzerinde hareket etmektedir , bu sabit noktanın koordinatları da (h ; k) dır. Mesafe için olan formülü tatbik edecek olursak;



(I) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ yi elde ederiz ki; bu bir dairenin standart şekildeki denklemidir.

Bu, formül bize doğrudan doğruya dairenin yarıçapını ve merkezinin koordinatlarını vermektedir.

Yukarıdaki eşitlik genişletilip, ikinci derece denklemlerinin genel şeklinde yazılabilir:

(II) $x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$ dır ki; bir dairenin genel denkleminin sarih bir şeklidir.

(III) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ Eğer dairenin merkezi, koordinat sisteminin orijininde ise; denklem şu şekle irca edilebilir:

(IV) $x^2 + y^2 = r^2$ dir.

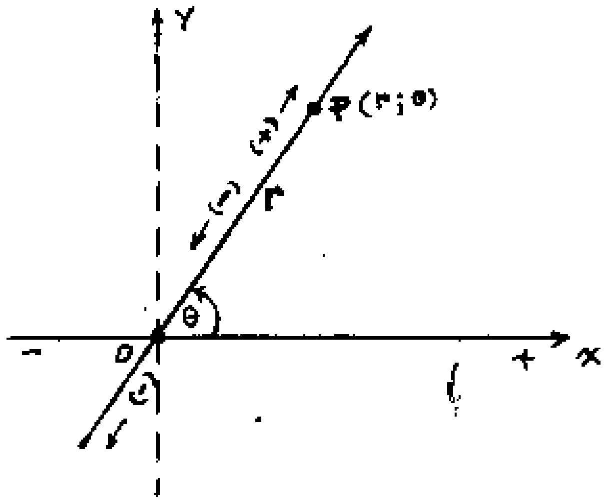
(III) numaralı eşitlik,(I) numaralı eşitlik şekline alınabilir:

(V) $(x+a/2)^2 + (y+b/2)^2 = (a^2 + b^2 - 4c) / 4$ dür. Burada merkezin koordinatları; $(-a/2;-b/2)$ ve yarıçap $r = 1/2 \quad a^2+b^2-4c$ dir. Meselâ; $2x^2+2y^2-5x+4y-7=0$ eşitliğini $x^2+y^2-(5/2)x + 2y-7/2=0$ şekline getirebiliriz. Burada $a=-5/2$, $b=2$, $c=-7/2$ dir. Merkezin koordinatları $(5/4;-1)$ ve yarıçap $r^2=(25+16+56)/16=97/16$ veya $r=(1/2)$ 97 dir. Şunu burada hatırlatalım ki; ikinci derece denklemlerinin diğer şekilleri; parabol, hiperbol ve elips'tir.

6.KUTBİ KOORDİNATLAR

Eğer, ufki bir hat kabul edecek olursak; bu hatta kutbi eksen denir. O noktasına ise; kutup veya orijin denir. Burada bir P noktasının yerini, bu noktadan ve orijinden geçen doğrunun kutup ekseni ile yaptığı açıyı ve o dan P ye olan r mesafesini, yaniyarıçap vektörünü biliyorsak; tayin edebiliriz. Burada r ve θ , P noktasının kutbî koordinatlarıdır ve P (r ; θ) şeklinde yazılır. Kutup eksenine dik olan doğruya karşıt kutbî eksen denir.

r nin O kutbu etrafında saat yelkovanının aksi istikametinde dönüşü; pozitif açıyı, saat yelkovanı istikametinde dönuşü ise;negatif açıyı husüle getirir. Kutuptan itibaren olan istikamet pozitif, kutba doğru olan istikamet ise; negatiftir.



Dik koordinat ile kutbî koordinat arasındaki bağıntı önemlidir. İki sistemden birini, diğerine tatbik edecek olursak; şu neticeleri derhal buluruz:

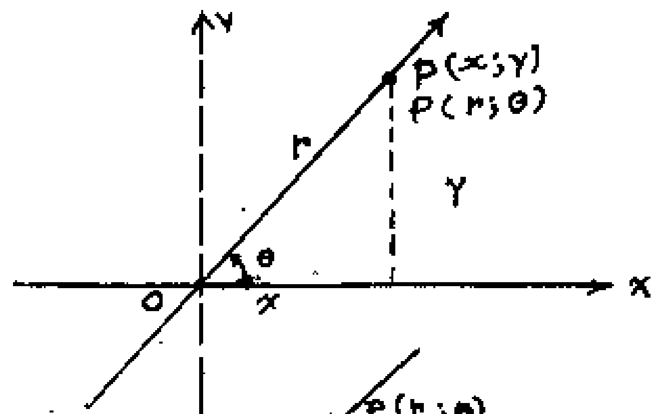
$x = r.\cos\theta$

$y = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \mathrm{arctan}\ y/x$

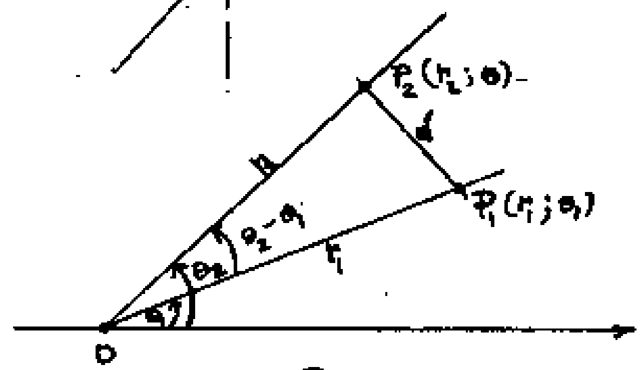
$\sin\theta = y / (\sqrt{x^2 + y^2})$

$\cos\theta = x / (\sqrt{x^2 + y^2})$



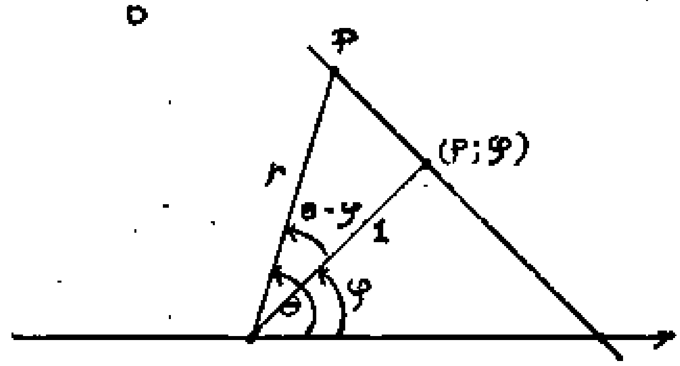
Bunlar, bir koordinatı, diğer bir koordinat sistemine çevirmekte kullanılan bağıntılardır.

İki nokta arasındaki mesafe, kutbî koordinatlar sisteminde üçgenlere ait kosinüs kanunundan tayin edilir. Eğer iki nokta $P_1(r_1;\theta_1)$ ve $P_2(r_2;\theta_2)$ ise; bu iki nokta arasındaki mesafenin karesi, doğrudan doğruya elde edilir.



$d^2 = r^2 + r_2^2 - 2\ r_1 r_2 \cos\ (\theta_2 - \theta_1)$ dir.

Bu eşitlik, noktaların biribirini takip ediş sırasına bağlı değildir.

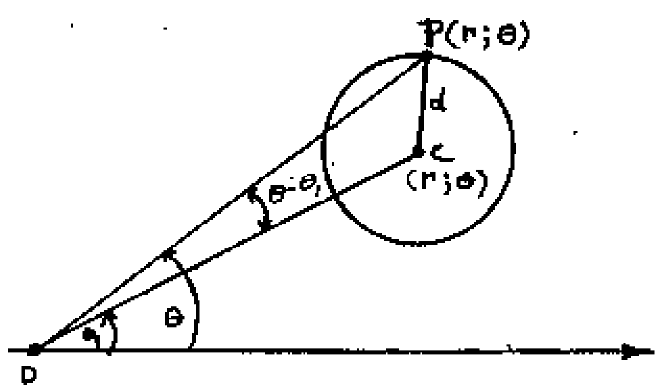


Kutbî koordinat sisteminde, bir doğrunun genel denklemi, çizgisel genel denklemin çevirme formülleri ile elde edilir.

$Ax + By + C = 0$ şu şekli alır ;

$A.r.\cos\theta + B.r.\sin\theta + C = 0$ dır.

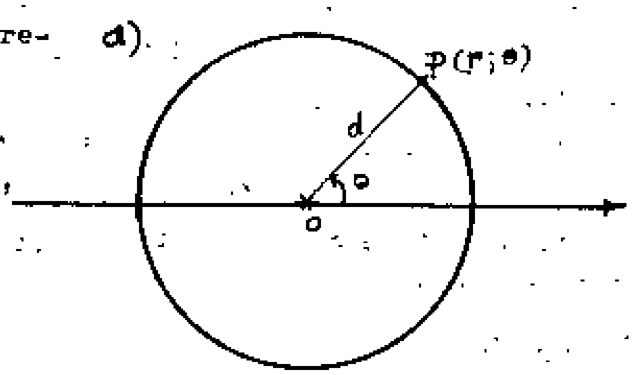
Şu not edilmelidir ki; bu denklem, çizgisel bir denklem değildir. Çünki; bu denklem içerisine tirigonometrik fonksiyon olan θ girer. Benzer olarak, kutuptan geçen $y = mx$ doğrusu, θ = arktan m kutbî koordinat denklemine haizdir. Ayni zamanda, çizgisel denklemin kutbî koordinat şekli, kutbi koordinat sistemindeki şeklinden elde edilebilir : $r.\cos\ (\theta - \varphi) = P$ dir.



Burada P, doğrunun kutuptan olan uzaklığı, φ normalin kutup ekseni ile yaptığı açı, θ ve r ise; doğru uzerindeki her hangi bir noktanın koordinatlarıdır.

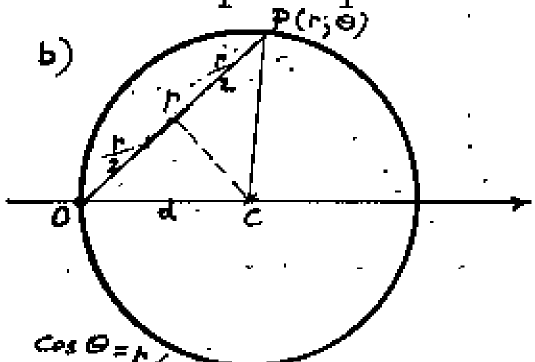
Kutbî koordinatlar sisteminde, bir dairenin denklemi, mesafe denkleminden, doğrudan doğruya çıkarılabilir. Buradaki d mesafesi, koordinatları r_1 ve θ_1 olan daire merkezinin, koordinatları r ve θ olan daire üzerindeki bir noktaya olan uzaklığıdır. Böylece, d mesafesi, dairenin yarıçapıdır.

a)



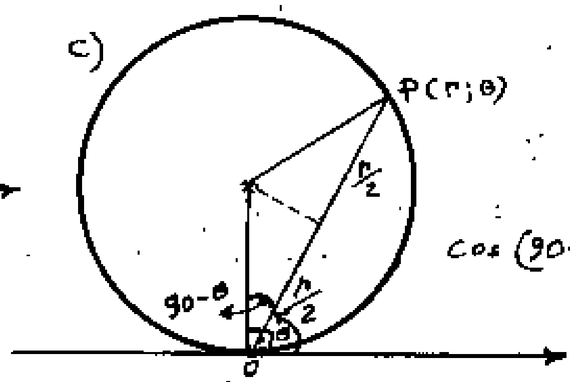
$d^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \mathrm{Cos}\,(\theta - \theta_1)$ dir.

b)



$\mathrm{Cos}\,\theta = r/2d$

c)



$\mathrm{Cos}\,(90-\theta) = \sin\theta = \frac{r}{2d}$

Dairenin üç hususi durumu vardır:

a) Merkez kutuptadır ve yarıçap d dir. ki; burada r = d olduğu görülür.

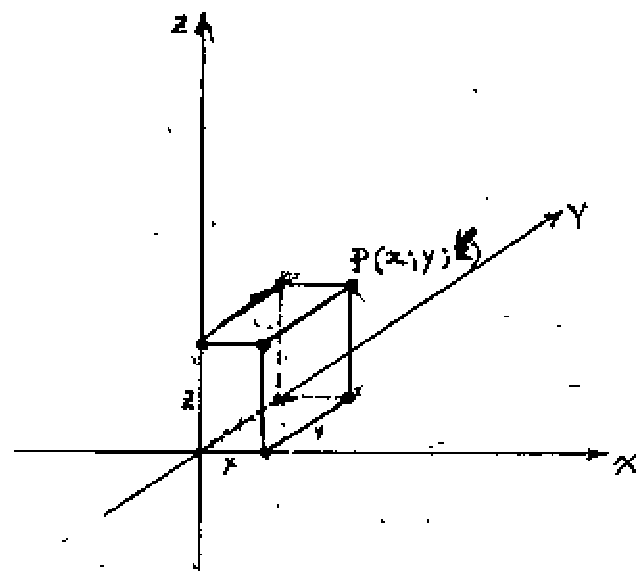
b) Merkez (d ; 0^o) dedir ve d yarıçaptır. Burada, r = 2dcosθ olduğu görülür.

c) Merkez (d;90^o) de dir ve d yarıçaptır. Burada r = 2d.sinθ olduğu görülür.

Bu üç durum yukarıdaki gibi gözükür.

7. UZAY ANALİTİK GEOMETRİ

Üç buğutluluk durumunda, bir noktanın koordinatları P(x;y;z) dir. Üç buğutluluk durumu, iki buğutluluk durumundakilere benzer formüllere sahiptir.



İki nokta arasındaki mesafe, noktalar $P_1(x_1;y_1;z_1)$ ve $P_2(x_2;y_2;z_2)$ olduğuna göre;

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \text{ dir.}$$

İki nokta arasındaki orta noktanın koordinatları, karşılıklı koordinatların ortalamasıdır: $\bar{x} = (x_1+x_2)/2$, $\bar{y} = (y_1+y_2)/2$, $\bar{z} = (z_1+z_2)/2$ dir.

Kosinüsler istikameti : $\lambda = \cos\alpha = (x_2-x_1)/d$, $\mu = \cos\beta = (y_2-y_1)/d$, $\nu = \cos\gamma = (z_2-z_1)/d$ dir.

Yine burada da; $\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$ dir. Paralellik durumunda: $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$ dir.

Diklik durumunda; yani iki doğru birbirine dik ise; $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$ dır.

Üç buğutluluk durumunda bir doğrunun denklemi; Ax+By+Cz+D=0 dır.

Eğer iki nokta $P_1(x_1;y_1;z_1)$ ve $P_2(x_2;y_2;z_2)$ verilmiş ise; bu noktalardan geçen doğru, aşağıdaki bağıntı ile temsil edilir:

$(x-x_1)/(x_2-x_1) = (y-y_1)/(y_2-y_1) = (z-z_1)/(z_2-z_1)$ dir.

İki doğru arasındaki Θ açısı şu formülle bulunur :

$$\cos \Theta = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \gamma_1 \gamma_2 \quad \text{dir.}$$

Misaller; M(1;2;-3) ve N(-1;-2;1) noktalarından geçen bir s doğrusu, P(0;1;4) ve Q(1;-3;0) noktalarından geçen diğer bir T doğrusu verilmiş ise; bu noktalar arasındaki doğru parçaları uzunlukları;

$MN = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$ $\qquad$ $PQ = \sqrt{1 + 16 + 16} = \sqrt{33}$ dür.

Kosinüsler istikameti; $\lambda_1 = -1/3$, $\mu_1 = -2/3$, $\gamma_1 = 2/3$
ve T doğrusu için; $\lambda_2 = 1/\sqrt{33}$, $\mu_2 = -4/\sqrt{33}$, $\gamma_2 = -4/\sqrt{33}$ dür.

Bu iki doğru arasındaki açı;

$\cos \Theta = (-1 + 8 - 8) / (3\sqrt{33}) = -1 / (3\sqrt{33}) = -1 / (3 \times 5{,}745) =$
$= -1 / 17{,}235 = -0.0580$ Buradan $\Theta = (-)\ 86^\circ\ 40'$ dır.

MN doğru parçasının orta noktasının koordinatları;

$\bar{x} = (1-1)/2 = 0$, $\bar{y} = (2-2)/2 = 0$, $\bar{z} = (-3+1)/2 = -1$ dir, ve nokta (0 ; 0 ; -1) ile gösterilir.

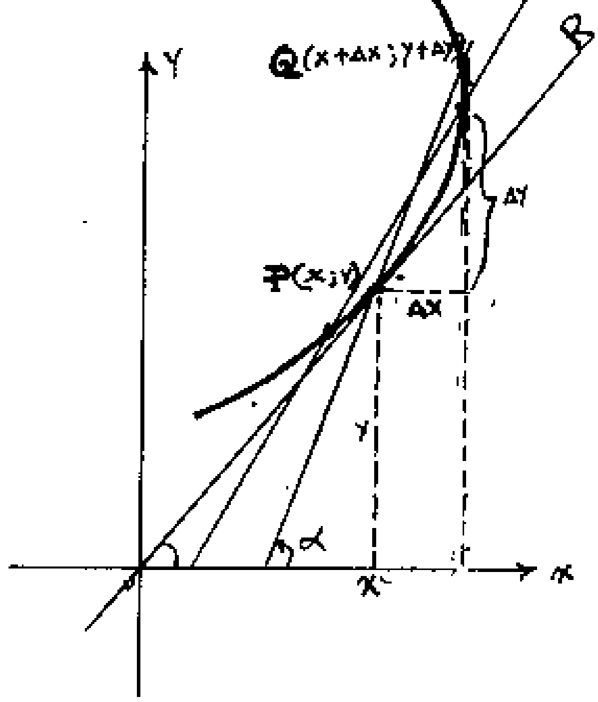
Şu not edilmelidir ki; üç buğutluluk durumunda , bir çizgisel denklemin grafiği bir düzlemdir. Eğer bir doğru üzerinde olmayan P_1, P_2, P_3 gibi üç noktamız var ise; Bu üç nokta, şu üç çizgisel denklemin kökleri ile bir düzlemi izah eder: $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$, $Ax_3+By_3+Cz_3+D=0$ dır.

D. YÜKSEK MATEMATİK

1. FONKSİYONLAR VE LİMİTLER

Eğer herhangi bir değişken olan x, diğer iki müstakil değişkene (y ve z) tabî ise; bu durumu şu şekilde yazabiliriz :
$x = f(y,z)$ dir. Meselâ; $x = y^2/z$ olabilir. Bu fonksiyon, bazı limit değerleri haizdir. Çünki; z sıfıra yaklaştıkça,($z \to 0$ şeklinde yazılır.) x sonsuza yaklaşır ($x \to \infty$).(Eğer $y \neq 0$ ve $y \neq \infty$ ise.) .

Diğer taraftan, bunu benzer durum altında; eğer $x \to \infty$ ise; $z \to \infty$ dır.



2. TÜREV

y= f (x) gibi, bir fonksiyon kabul edelim. Bu fonksiyon xy düzleminde bir eğri teşkil eder, ve grafikle de gösterilebilir. Biz bu eğri üzerinde bir P(x;y) noktası seçebiliriz. Diğer bir nokta da; Q (x + Δ x ; y + Δ y) olsun. Burada, Δ x ve Δ y küçüktürler. Fakat, esas koordinatlara yapılan mahdut ilâvelerdir. PQ doğru parçasının x ekseni ile yaptığı açının tanjantı:

$\tan\alpha = \Delta y/\Delta x$ dir.

Eğer x i daha da küçültürsek; Δy de küçülmeye başlar ve nihayet Q noktası P noktası üzerine çakışır ve PQ noktasından geçerek eğriyi kesen doğru , artık eğriye P noktasında teğet olmuştur. Δy / Δ x oranının Δ x →0 için limiti, P noktasındaki eğri teğetinin meyili olur. Bu da şu şekilde yazılabilir.:

$$\lim_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bu işaretlere y = f (x) in veya f (x) fonksiyonunun müştakı veya türemesi denir. Bu ifadıyi aşağıdaki şekilde de yazabiliriz : x, Δx kadar değişirse; y de Δy kadar değişir. Bu iki değişme miktarının oranı; aralıkları ile x deki her birim değişme için , y in ortalama değişme nisbetidir. dy/dx limitine gittiğimiz zaman;

$$dy / dx = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x) \text{ dir.}$$

Biz x niktasında x in her birim değişmesi için , y nin ani değişme nisbetine haiz oluruz.

Şu not edilmelidir ki; dy / dx oranındaki d, bir katsayı değildir. Fakat, bir semboldür. Bundan dolayı , bunlar bir rakam gibi birbirini götürmezler veya bir rakam olarak muameleye tabi tutulmazlar. Yine bunlar, değişken ile birlikte bulundurulmamalıdır.

Bir fonksiyonun türevi alınırken , aşağıdaki basamaklar takip edilir:

1). y = f (x) gibi bir fonksiyona sahibiz.

2) x ve y yi, Δ x ve Δy gibi artmalar ilâve ederek, yükseltiyoruz:

$y + \Delta y = f (x + \Delta x)$

3) Birinci eşitliği ikinci eşitlikten çıkartıyoruz : $\Delta y = f (x + \Delta x) - f (x)$

4) Yeni eşitliğin her iki tarafını Δx e bölüyoruz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - \Delta x}{\Delta x}$$

5) Sonra bu eşitliğin Δ x →0 için limitini alıyoruz :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad gibi.$$

İkinci ve beşinci basamaklar arasında , birçok durumlarda, limitin oranı 0 / 0 veya ∞/∞ şekline sokulmaması için; bir takım değiştirmelerin yapılması icap eder. Sonra, bütün donksiyonların türevi olmaz.

Aşağıda türeve sahip bir kaç fonksiyon misali verilmiştir:

1) $y = c$ Bu fonksiyon, y nin sabit olduğunu söylüyor. Sabite, bir artma ile yükseltilemez.

$y + \Delta y = 0$

$\Delta y = 0$

$\Delta y / \Delta x = 0$ $\qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = dy / dx = 0$ dır.

Sabit bir sayının müştakı veya türevi sıfırdır.

2) $y = x$ Burada bir değişken diğer bir değişkene eşittir. Bunun manası; bu nokta da teğet olan doğrunun meyili bire eşittir ve tanjantı bire eşit olan açı 45^0 dir. Bu netice, yukarıda bahsedilen basamaklar takip edilerek elde edilir. $y = x$ fonksiyonunun türevi bire eşittir.

$y + \Delta y = x + \Delta x$

$y = x + \Delta x - x = \Delta x$

$y / \Delta x = 1$ $\qquad dy / dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = 1$

Bir müstakil değişkenin kendine göre türevi bire eşittir.

3) $y = ax$ $\qquad y + \Delta y = a (x + \Delta x) = a x + a \Delta x$

$\Delta y = x + a \Delta x - ax = a \Delta x$

$\Delta y / \Delta x = a$

$dy / dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = a$

4) $y = x^2$ $\qquad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \Delta x + \Delta x^2$

$y = 2x \Delta x + \Delta x^2 = \Delta x (2x + \Delta x)$

$\Delta y / \Delta x = (\Delta x / \Delta x) (2x + \Delta x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x) = dy / dx = 2x$

5) $y = x^n$ $\qquad dy / dx = n \, . \, x^{n-1}$

Bu formül, n in her türlü kıymetleri için doğrudur(pozitif olsun, negatif olsun, kesir olsun, tam rakam olsun.) .

Meselâ; $y = x^n$ e bir misal,

$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$ $\qquad dy / dx = (1/2)x^{(1/2) - 1} = (1/2) x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x}) = \sqrt{x}/2x$

Diğer bir misal ;

$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ $\qquad dy / dx = (1/3) x^{(1/3)-1} = (1/3) x^{-2/3}$

$= 1 / 3 \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} / 3x$

6) u ve v nin x in fonksiyonları olduğunu düşünelim; $u = u (x)$ ve $v = v (x)$ dir.

$y = u + v$ $\qquad y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$

$y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v = \Delta u + \Delta v$

$dy / dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta u / \Delta x + \Delta v / \Delta x) = du/dx + dv/ dx$

$y/\Delta x = u/\Delta x + v/\Delta x$ dir.

7) $y = u \cdot v$ $\quad y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\,\Delta u + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$

$$y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \left(+ \frac{du}{dx} \cdot 0 \right)$$

Bu şekilde farklı fonksiyonların muhtelif türevleri bulunabilir. Bununla beraber, bu fonksiyonların türev inkişaflarını gösterecek olursak; çok zaman alır. Bu sebeb den; formülleri gösteren aşağıdaki tablo tanzim edilmiştir.

NOT: Burada , sık sık kullanılan fonksiyonların türevleri gösterilmiştir. Bu gibi fonksiyonların türevleri, muhtelif matematik tablolarında ve yüksek matematik ders kitaplarında bulunabilir.

1) $y = c \quad y' = 0$

2) $y = x \quad y' = 1$

3) $y = ax \quad y' = a$

4) $y = x^n \quad y' = n.x^{n-1}$

5) $y = u + v \quad y' = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Burada $u = u(x)$; $v = v(x)$ idi.

6) $y = u \cdot v \quad y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

7) $y = \frac{u}{v} \quad y' = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$= \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

8) $y = f(u) \quad y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Burada $u = g(x)$ idi.

9) $y = u^n \quad y' = n.u^{n-1} \cdot du/dx$

10) $y = \ln u \quad y' = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

11) $y = \log u \quad y' = \frac{1}{u} \log e \frac{du}{dx}$

12) $y = a^u \quad y' = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

13) $y = u^v \quad y' = v.u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$

14) $y = e^u \quad y' = e^u \frac{du}{dx}$

14,1) $y = x^x \quad y' = x^x(1 + \ln x)$

15) $y = \sin u \quad y' = \cos u \frac{du}{dx}$

16) $y = \cos u \quad y' = -\sin u \frac{du}{dx}$

17) $y = tg\, u \quad y' = \sec^2 u \frac{du}{dy}$

18) $y = ctg\, u \quad y' = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

19) $y = \sec u \quad y' = \sec u\, tg\, u \frac{du}{dx}$

20) $y = \csc u \quad y' = -\csc u\, ctg\, u \frac{du}{dx}$

21) $y = \text{arksin } u \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}$

22) $y = \text{arkcos } u \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}$

23) $y = \text{arktg } u \quad y' = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}$

24) $y = \text{arkctg } u \quad y' = \frac{-1}{1 + u^2} \frac{du}{dy}$

25) $y = \text{arksec } u \quad y' = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$

26) $y = \text{arkcsc } u \quad y' = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$

3. KAT'İ TÜREV

y ayrı olmayıp, diğer terimlerde de kat'i olarak bulunan fonksiyonlarda türev alınırken yapılacak en iyi iş; ilk defa türevini almak, sonra da dy/dx i çözmektir.

Kat'i türeve bir misal aşağıdadır :

$x^5 + x^2y^3 - y^6 + 7 = 0$ ifadesinin türevini alırsak;

$5x^4 + 2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} - 6y^5 \frac{dy}{dx} = 0$ Buradan da;

$\frac{dy}{dx}(6y^5 - 3x^2y^2) = 5x^4 + 2xy^3$ ve $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 + 2xy^3}{6y^5 - 3x^2y^2}$

İkinci bir misal ;

$y = e^{xy} + \sin x$ Bunun türevi aşağıdaki gibidir:

$y' = y\,e^{xy} + x\,y'e^{xy} + \cos x$

$y'(1 - x\,e^{xy}) = y\,e^{xy} + \cos x$ veya $y' = \frac{y\,e^{xy} + \cos x}{1 - x\,e^{xy}}$ dir.

4. YÜKSEK DERECELİ TÜREVLER

Eğer bir fonksiyonun türevi, tekrar bir fonksiyon ise; türevin türevi de bulunabilir, ve bu şekilde devam edip gidilebilir.

Yüksek dereceli türevlerin yazış metodları :

$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$ İkinci derecen türev denir.

$\frac{d(d^2y/dx^2)}{dx} = \frac{d^2(dy/dx)}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$ Üçüncü dereceden türev denir.

$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$ n' inci dereceden türev denir.

Daha yüksek dereceden türevler, bibirini takip eden türevler almakla bulunurlar.

Meselâ; $y = x^7 + 3e^{x^2} - \sin 2x$

$y' = 7x^6 + 6x\,e^{x^2} - 2\cos 2x$

$y'' = 42x^5 + 6e^{x^2} + 12x^2e^{x^2} + 4\sin 2x$

$y''' = 210x^4 + 12xe^{x^2} + 24xe^{x^2} + 24x^3e^{x^2} + 8\cos 2x$

5. KISMÎ TÜREV

Eğer, z değişkeni, diğer iki değişkenin fonksiyonu ise; $(z=f(x;y))$ gibi.) bu müstakil değişkenlerin biri tesbit edilirse yani sabit tutulursa; yalnız biri değişir. İşte iki veya daha fazla değişkenden birine göre türev almaya; kısmi türev denir. Kısmi türev şu harfle gösterilir: ∂ . Meselâ; Eğer z yi, x ve y nin fonksiyonu olarak kabul ettikten sonra, z nin x e göre kısmî türevini alıyorsak ; bunu şu şekilde yazabiliriz : $\frac{\partial z}{\partial x}$ veya y ye göre kısmi türevini alıyorsak; $\frac{\partial z}{\partial y}$ yazarız. Eğer bir değişken olan z nin x ve y ye göre türevini alıyorsak (yekün Türev.) şu şekilde yazarız :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Meselâ; Eğer, $z = f (x;y)$ ve $x = (t)$, $y = y (t)$ ise; z nin t ye göre yekun türevi :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Burada, x ve y nin fonksiyonudur.

Geometrik olarak, eğer bir değişken diğer iki değişkenin fonksiyonu ise; bu değişken bir yüzeydir. Eğer değişkenlerden biri sabit tutulursa; bu yüzey, y = Sabit tarafından kesilmiştir. Kısmi türev $\partial z / \partial x$ bir eğrinin meyilidir. Aynı veya diğer değişkene göre, daha yüksek dereceden kısmi türevini de alabiliriz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{gibi.}$$

Ortadaki ikinci kısmi türev, ilk defa x e göre, sonra y ye göredir. Türeydeki sıranın ehemmiyeti yoktur.

Meselâ: $z = e^x \sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \sin y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \cos y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$z = x^2 y + e^{xy} \qquad x = t^2 \quad y = \ln t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + y e^{xy})\, 2t + (x^2 + x e^{xy}) \frac{1}{t}$$

6. BELİRLİ OLMAYAN İNTEGRALLER

İntegral ameliyesi, differansiyel ameliyesinin tersidir. Meselâ; $y = \frac{1}{4}x^4 + c$ fonksiyonunun differansiyeli $dy/dx = x^3$ dür. Şimdi biz, $dy/dx = x^3$ e sahipsek, differansiyeli x^3 olan fonksiyonu bulabiliriz:

$$y = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c \text{ dir.}$$

Diğer bir misal;

$$y = \int \cos u\, du = \sin u + c \text{ dir.}$$

Çünki; $\sin u + c$ nin u ya göre differansiyeli, $\cos u$ dur. Burada c sabitesi her hangi bir kıymet olabilir. Çünki; sabit bir sayının türevi sıfırdır. x^3 ün t ye göre integrali, yani $\int x^3\, dt$ yalnız x ile t arasındaki fonksiyonel bağıntı biliniyor ki; bulunabilir. Meselâ; Eğer, $x = e^{2t}$ ise; buradan $\int x^3 dt = \int e^{6t} dt = \frac{e^{6t}}{6} + c$ dir. Çünki; $(e^{6t}/6) + c$ nin t ye göre türevi; $(6\, e^{6t}/ 6) + 0$ ı ihtiva eder ki; bu kıymet integral altındadır.

İntigralin kontrolu, differansiyeli alınmak sureti ile daima yapılabilir. Differansiyeller durumunda, belirli bir fonksiyonla toplamının integrali, bu fonksiyonların ayrı ayrı integrallerinin toplamına eşittir.

1) $\int (u+v)\, dx = \quad u.dx + \quad v.dx$

1,1) $\int (u - v)\, dx = \quad u.dx - \quad v.dx$ Burada u ve v , x in fonksiyonlarıdır.

En fazla kullanılan integrallerin listesi aşağıda verilmiştir. İntegrallere ait tablo, bazı kitaplarda bulunabilir. Bununla beraber, fonksiyonların şekilleri standart değildirler. Bu gibi durumlarda Kısımlar Tarafından İntegral kullanılabilir. Bu metod da çarpımın differansiyeli formülü kullanılır.

$$d(u \cdot v) = u.dv + v \cdot du \quad \text{veya} \quad u.dv = d(u \cdot v) - v.du \text{ dur.}$$

Bu eşitlikte her iki tarafın integralini alırsak;

$\int u.dv = \int d(u.v) - \int v.du$ yu elde ederiz.

1 in her hangi bir fonksiyona göre integrali kendisidir. Çünki; bir fonksiyonun kendine göre differansiyeli birdir. Bundan dolayı yukarıdaki eşitlik şu şekli alır:

2) $\int u.dv = u.v - \int v.du$ dur.

Misal; eğer biz $\int x\, e^x.dx$ i bulmak istiyorsak, bunun standart şekli olmadığından; $u = x$, $dv = e^x.\,dx$ i yerlerine korsak ;

$$\int x.e^x.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du$$

$dv = e^x.dx$, $v = e^x$, $u = x$ olduğuna göre; $du = dx$ dir.

$\int x.e^x.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du = x.e^x - e^x + c$ dir. Çünki; $\int e^x.dx = e^x + c$ olması ile isbat edilir.

1) $\int a.dx = a.u$

2) $\int a.f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx.$

3) $\int (u \pm v)\, dx = \int u.dx \pm \int v.dx$

4) $\int u.dv = u.v - \int v.du$

5) $\int x^n.dx = x^{n+1}/(n+1)$

burada $n=-1$ durumu müstesnadır.

6) $\frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x)$

Burada $f'(x) = df(x)/dx$ dir.

7) $\int dx/x = \ln x$

8) $\int e^x.dx = e^x$

9) $\int e^{ax}.dx = e^{ax}/a$

10) $\int b^{ax}.dx = b^{ax} / a \ln b$.

11) $\int (a+bx)^n . dx = (a+bx)^{n+1} / (n+1)b$

Burada n=-1 müstesna.

12) $\int dx / (a+bx) = (1/b) \ln (a+bx)$

13) $\int dx / (a+bx)^2 = -1 / b(a+bx)$

14) $\int x.dx /(a+bx) = (1/b^2)(a+bx-a\ln(a+bx))$

15) $\int \frac{x.dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln (a + bx) + \frac{a}{(a+bx)} \right)$

16) $\int \frac{x^2 dx}{a + bx} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{2} (a - bx)^2 - 2a (a + bx) + a^2 \ln (a+bx) \right)$

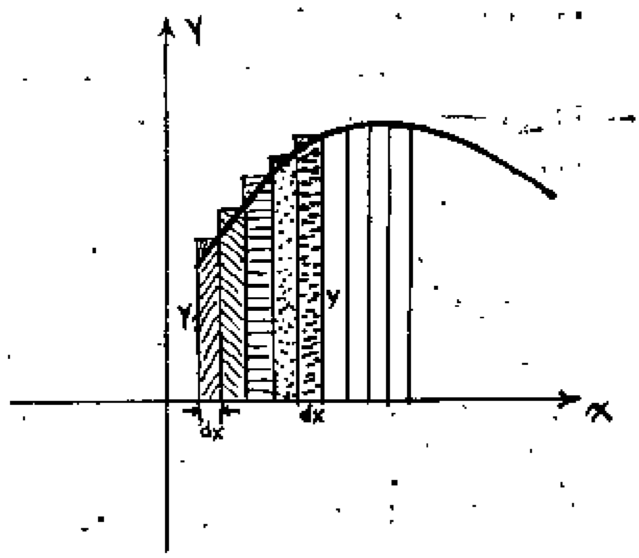
17) $\int \sin x . dx = - \cos x + c$

18) $\int \cos x .dx = \sin x + c$

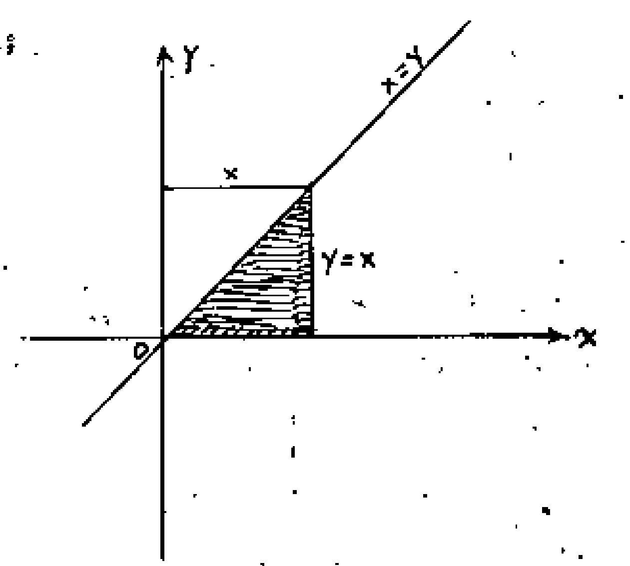
19) $\int \tan x \, dx = - \ln \cos x + c$

20) $\int \cot x \, dx = \ln \sin x + c$

İNTEGRALİN GEOMETRİK MANASI



Eğer, $y=f(x)$ ise; $\int y.dx$ sonsuz derecede dar, bütün y.dx dikdörtgenlerinin toplamına eşittir ki; $y=f(x)$ eğrisinin altındaki alanı temsil eder. İntegral işareti, $\int$, toplamı belirtir. Dikdörtgenlerin temsil ettikleri eğriyi basamaklı gösterirler. Fakat, dx aralıkları, sonsuz derecede küçük olursa; dikdörtgenlerin tepeleribir eğri teşkil ederler. Meselâ; $y=x$ fonksiyonu ,$\int x.dx = x^2/2$ integralini verir. Her noktada x=y olduğuna göre; $m=1=\tan 45^\circ$ dir. İşte eğim açısı 45° olan bu doğru üzerinde , bir noktanın ordinatlarının teşkil ettiği karenin yarısı, bu integral dir. Çizgi, yine orijinden geçer. Benzer olarak; her hangi bir fonksiyonun integrali, eğrisi altındaki alanı temsil eder. İntegral sabitesi ordinat ve absis üzerindeki mikyası ayarlar.



7.BELİRLİ İNTEGRALLER

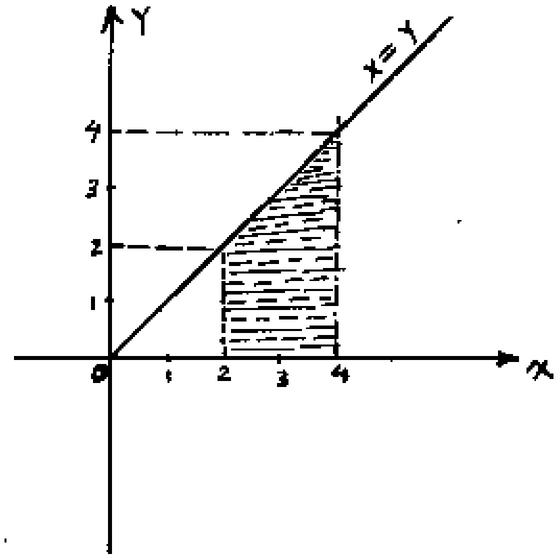
f(x) in belirli integrali, değişken x in, iki farklı kıymeti için f(x) integralleri arasındaki farktır. Bu, şu şekilde yazılabilir:

$\int_{x_1}^{x_2} f (x) . dx$, f (x) .in x_1 den x_2 ye kadar olan integralini bulmak için ; biz bu integralin genel şeklini buluruz ve burada x in yerine x_2 kıymetini koruz, sonradan x_1 kıymetini koyarak birinciden çıkartırız. Eğer $F(x)=\int f(x).dx$ ise;

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x).dx = \Big[F(x) \Big]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) \text{ dir.}$$

İntegral sabitesi kaybolur. Çünki; ikinci integral, birinci integralden çıkarılmaktadır. Misal ;

$$\int_2^3 x^2 . dx = \left[x^3/3 \right]_2^3 = 3^3/3 - 2^3/3 = 9 - 2(2/3) = 6\ (1/3) \text{ dür.}$$



Geometrik olarak, belirli integral absisinin iki değeri arasındaki f(x) fonksiyonunun grafikî şekli olan eğrinin altındaki alanı temsil eder. Eğer, yine biz misal olarak y = x fonksiyonunu ele alacak olursak; bu fonksiyonun temsil ettiği eğri, eğim açısı 45° olan ve orijinden geçen bir doğrudur. 2 den 4 e kadar belirli integral şekli; $x_1 = 2$, ve $x_2 = 4$ olduğuna göre ;

$$\int_2^4 x.dx = \left[x^2/2 \right]_2^4 = 8 - 2 = 6 \text{ dır.}$$

Alanın birimi, orijin birime ve absise bağlıdır. Eğer her ikiside cm ise; alan cm^2 dir. Yahut; eğer y basıncı, x de hacmi temsil ederse; alan bu ikisinin çarpımını temsil eder ki; bu da enerjidir (g . cm^2 / sec^2 dir.) . Bazan, belirli integrallerin mahdut kıymeti yoktur. Diğer taraftan, belirsiz limitler, mahdut integralleri çıkarırlar.

E. SERİLER

I.FONKSİYONLARIN SERİ ŞEKLİNE İNKILABI

Bir f(x) fonksiyonu, bir serideki sonsuz sayıda terimler şeklinde inkişaf ettirilebilir. Meselâ; $f(x) = 1 / (1 - x)$ fonksiyonu, bölüm irca edilerek genişletilebilir:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\ \cline{2-2}
\underline{1-x} & 1+x+x^2+x^3+ \dots + x^n + \dots \\
0+x & \\
\quad \underline{x-x^2} & \\
\quad 0+x^2 & \\
\qquad \underline{x^2-x^3} & \\
\qquad 0 + x^3 & \\
\qquad\quad \underline{+ x^3-x^4} & \\
\qquad\quad 0 + x^4 &
\end{array}$$

Buradan şu neticeyi elde ettik;

1) $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+ \dots + x^n + \dots$

Fonksiyonları seriler şeklinde genişletmek için; diğer yollar da vardır:

MACLAURİN 'e göre:

2) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Burada; f(0), x=0 için fonksiyonun kıymetidir. f'(0) ise; f(x) fonksiyonunun ilk türevidir ve x yerine sıfır konmuştur. f"(0) da; f(x) fonksiyonunun ikinci türevi olup, x yerine sıfır konmuştur.

(1!) bir faktoriyalı, yani 1 dir.

(2!) = 1.2 dir.

(3!) = 1.2.3 dür.

(4!) = 1.2.3.4 dür.

(n!) = 1.2.3.4.5.6.7.8. ... n dir.

$f(x)=1/(1-x)$ fonksiyonu(2) deki şekilde serisi inkişaf ettirilirse; (1) dekinin ayni olduğu görülür.

$f(x)=e^x$ fonksiyonunu, seri şeklinde teşekkül ettirebiliriz:

$f'(x)=f''(x)=f^{(n)}(x)=e^x$ $x=0$ için 1 olur. Böylece:

3) $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots+x^n/n!+\ldots$

Yine misal olarak; $f(x)=\sin x$, şu şekilde genişletilebilir:

$f(x)=\sin x$; $f'(x)=\cos x$; $f''(x)=-\sin x$; $f'''(x)=-\cos x$

$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$

Buradan da; $\sin x = 0+1.x+0x^2-(1/3!)x^3+0.x^4+(x^5/5!)-x^7/7!+\ldots$

4) Yahut, $\sin x = x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\ldots-\ldots+\ldots-\ldots+\ldots$

Bu mütenavip bir seridir ve işaretler değişir.

5) $(1+x)^m=1+mx/1!+m(m-1)/2!\,(x)^2+\ldots+(m(m-1)\ldots(m-n+2)/(n-1)!)\,x^{n-1}+\ldots$

Fonksiyonların genişletilmesinde kullanılan diğer metodlar da vardır. Fakat; diğer fonksiyonların yalnız seri şeklinde genişletilmiş neticeleri gösterilecektir.

6) $\ln x - \ln a = \ln(x/a) = (x-a)/a - (1/2)((x-a)^2/a^2)+(1/3)((x-a)^3)/a^3) + ((-1)^n/(n-1)a^{n-1})(x-a)^{n-1}+\ldots$

Bu seri, $a > 0$ için doğrudur ve $0 < x \leqslant 2a$ için mahdut kıymetleri haizdir.

$f(x) = 1/(1+x)$ fonksiyonu, şu şekilde genişletilebilir:

7) $1/(1+x) = 1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots$

Diğer fonksiyonlar

8) $(1\mp a)^m(1\mp b)^n = 1\mp ma\mp nb\mp\ldots$

5) e göre;

9) $1/(1\mp x^2) = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots$

Benzer olarak ;

10) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \ldots$$

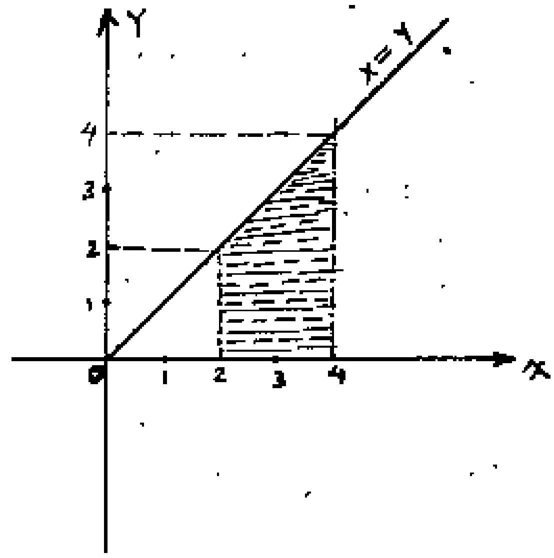
ve

11) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \ldots$$

İntegral sabitesi kaybolur. Çünki; ikinci integral, birinci integralden çıkarılmaktadır. Misal ;

$$\int_2^3 x^2 . dx = \left[x^3/3 \right]_2^3 = 3^3/3 - 2^3/3 = 9 - 2(2/3) = 6\ (1/3) \text{ dür.}$$

Geometrik olarak, belirli integral absisinin iki değeri arasındaki f(x) fonksiyonunun grafikî şekli olan eğrinin altındaki alanı temsil eder. Eğer, yine biz misal olarak $y = x$ fonksiyonunu ele alacak olursak; bu fonksiyonun temsil ettiği eğri, eğim açısı 45° olan ve orijinden geçen bir doğrudur. 2 den 4 e kadar belirli integral şekli; $x_1 = 2$, ve $x_2 = 4$ olduğuna göre ;



$$\int_2^4 x.dx = \left[x^2/2 \right]_2^4 = 8 - 2 = 6 \text{ dır.}$$

Alanın birimi, orijin birime ve absise bağlıdır. Eğer her ikiside cm ise; alan cm^2 dir. Yahut; eğer y basıncı, x de hacmi temsil ederse; alan bu ikisinin çarpımını temsil eder ki; bu da enerjidir ($g . cm^2 / sec^2$ dir.) . Bazan, belirli integrallerin mahdut kıymeti yoktur. Diğer taraftan, belirsiz limitler, mahdut integralleri çıkarırlar.

E. SERİLER

I. FONKSİYONLARIN SERİ ŞEKLİNE İNKILABI

Bir f(x) fonksiyonu, bir serideki sonsuz sayıda terimler şeklinde inkişaf ettirilebilir. Meselâ; $f(x) = 1 / (1 - x)$ fonksiyonu, bölüm irca edilerek genişletilebilir:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\ \cline{2-2}
\underline{1-x} & 1+x+x^2+x^3+ \ldots + x^n + \ldots \\
0+x & \\
\quad \underline{x-x^2} & \\
\quad 0+x^2 & \\
\qquad \underline{x^2-x^3} & \\
\qquad 0+x^3 & \\
\qquad\quad \underline{+x^3-x^4} & \\
\qquad\quad 0+x^4 &
\end{array}
$$

Buradan şu neticeyi elde ettik;

1) $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+ \ldots + x^n + \ldots$

Fonksiyonları seriler şeklinde genişletmek için; diğer yollar da vardır:

MACLAURİN 'e göre:

2) $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!} x + \dfrac{f''(0)}{2!} x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$

Burada; f(0), x=0 için fonksiyonun kıymetidir. f'(0) ise; f(x) fonksiyonunun ilk türevidir ve x yerine sıfır konmuştur. f"(0) da; f(x) fonksiyonunun ikinci türevi olup, x yerine sıfır konmuştur.

(1!) bir faktoriyalı, yani 1 dir.

(2!) = 1.2 dir.

(3!) = 1.2.3 dür.

(4!) = 1.2.3.4 dür.

(n!) = 1.2.3.4.5.6.7.8. ... n dir.

$f(x)=1/(1-x)$ fonksiyonu(2) deki şekilde serisi inkişaf ettirilirse; (1) dekinin aynı olduğu görülür.

$f(x)=e^x$ fonksiyonunu, seri şeklinde teşekkül ettirebiliriz:

$f'(x)=f''(x)=f^{(n)}(x)=e^x$, $x=0$ için 1 olur. Böylece:

3) $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots+x^n/n!+\ldots$

Yine misal olarak; $f(x)=\sin x$, şu şekilde genişletilebilir:

$f(x)=\sin x$; $f'(x)=\cos x$; $f''(x)=-\sin x$; $f'''(x)=-\cos x$

$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$

Buradan da; $\sin x = 0+1.x+0x^2-(1/3!.)x^3+0.x^4+(x^5/5!)-x^7/7!+\ldots$

4) Yahut, $\sin x = x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\ldots-\ldots+\ldots-\ldots+\ldots$

Bu mütenavip bir seridir ve işaretler değişir.

5) $(1+x)^m=1+mx/1!+m(m-1)/2!\,(x)^2+\ldots+(m(m-1)\ldots(m-n+2)/(n-1)!)\,x^{n-1}+\ldots$

Fonksiyonların genişletilmesinde kullanılan diğer metodlar da vardır.. Fakat; diğer fonksiyonların yalnız seri şeklinde genişletilmiş neticeleri gösterilecektir.

6) $\ln x-\ln a=\ln(x/a)=(x-a)/a-(1/2)((x-a)^2/a^2)+(1/3)((x-a)^3/a^3)+$
$((-1)^n/(n-1)a^{n-1})(x-a)^{n-1}+\ldots$

Bu seri, $a>0$ için doğrudur ve $0<x\leqslant 2a$ için mahdut kıymetleri haizdir.

$f(x)=1/(1+x)$ fonksiyonu, şu şekilde genişletilebilir:

7) $1/(1+x)=1-x+x^2+x^3+x^4+\ldots$

Diğer fonksiyonlar

8) $(1\mp a)^m(1\mp b)^n=1\mp ma\mp nb\mp\ldots$

5) e göre;

9) $1/(1\mp x^2)=1\mp 2x+3x^2\mp 4x^3+5x^4\mp\ldots$

Benzer olarak ;

10) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\ldots$$

ve

11) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-1/2}=1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\ldots$$

II. NUMERİK HAKİKATE YAKIN TAHMİN

Seriler, küçük kıymetlerle yapılan hesaplarda, nümerik kıymetleri, hakikate yakın olarak yapılan tahminlerde kullanılabilir. Eğer seride $|x| < 1$ ise ve yine x bölen ise; x in yüksek derecesinden üsleri (x^2, x^3 vesaire gibi.) çok küçük sayılar olmağa başlar ve birçok pratik ameliyeler için, yüksek dereceden üsleri ihtiva eden terimi ihmal edilebilir..Diğer bir cümle ile; seriler, x i ihtiva eden terimden sonra kesilir. Meselâ; $1/0,99 = 1/(1-0,01)$ dir. Burada $x=0,01 < 1$ dir. Biz burada seri 1) i tatbik edebiliriz :

$1/(1-0,01) = 1 + 0,01 + 0,0001 + 0,000001 + \ldots$ i elde ederiz. Burada, 3 ve ondan sonra gelen terimler ihmal edilebilir. Böylece; seri ikinci terimden sonra kesilir : $1/0,99 = 1/(1-0,01) \approx 1 + 0,01 \approx 1,01$ elde olunur. Benzer olarak;(10 numaraya göre)

$$\frac{1}{\sqrt{1,02}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,02}}$$ Burada $x = 0,02$ ve $\frac{1}{\sqrt{1,02}} = 1 - 0,02/2 = 1-0,01=0,99$

bulunur. Veya 9 numaraya göre;

$$\frac{1}{(1,0009)^2} = \frac{1}{(1+0,0009)^2} \approx 1 - 2(0,0009) \approx 1-0,0018 \approx 0,9982$$ dir.

Diğer bir misal;

$1/(0,94)^2 = 1/(1-0,06)^2 \approx 1+2 \times 0,06 \approx 1 + 0,12 \approx 1,12$

Eğer daha fazla doğruluğa ihtiyaç varsa; üçüncü terim de seriye dahil edilebilir. Son misal de şu sonucu verecektir :

$1/(0,94)^2 \approx 1 + 2 \times 0,06 + 3 \times 0,0036 \approx 1 + 0,12 + 0,0108 \approx 1,228$ dir ki; daha evvelki neticeden farkı, biraz vardır. Buna da sebeb; x in büyük olmasıdır. Bir evvelki durumda $1/(1,0009)^2$ olsa idi; $1/(1,0009)^2 = 1-0,0018+0,00000243 \approx 0,99820243$ olacaktı ki; pratik olarak aynidir. Çünki; x çok küçüktü, x,y çok küçük kıymetler ve m ile n her hangi bir kıymet olduğuna göre; en fazla kullanılan hakikate yakın tahmin formülleri aşağıdadır:

a) $(1+x)^m = 1+mx$
b) $(1-x)^m = 1-mx$
c) $(1\pm x)^m(1\pm y)^n = 1\pm mx\pm ny$
d) $1/(1+x) = 1-x$
e) $1/(1-x) = 1+x$
f) $1/(1+x)^m = 1-mx$
g) $1/(1-x)^m = 1+mx$
h) $\sqrt{mn} = (n+m)/2$ eğer m n ise.
i) $\sin \theta = \theta$
h) $\tan \theta = \theta$ } Eğer, θ radyan cinsinden çok küçük bir açı ise.