T.C.
BAŞBAKANLIK
DEVLET METEOROLOJİ İŞLERİ
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

2152

ZAMAN SERİLERİ

HAZIRLAYAN

Mustafa SARIÇİÇEK
(Ziraat Yük. Mühendisi)

E.A. 94 TEKSİR ATÖLYESİ (A.300 10.1981)

ZAMAN SERİLERİ VE KULLANILIŞLARI

Bir olay, bir ekonomik faaliyet,bir biyolojık aktivite olabilen bir değişkenin birbirini izleyen zaman birimleri için aldığı değerlerin sıralanışına ZAMAN SERİSİ diyoruz.Zaman birimi olarak,konuya göre: Yıl,ay,hafta,gün saat gibi herhangi bir zaman birimi alınabilir.Alınan birimin,ayrıca,ne kadar zamanı kapsadığı belirtilir.Örneğin,dörder haftalık,üçer aylık gibi.Koordinatlar sisteminde yatay eksen X-değişkeni zamanı,Y-değişkeni de olay ya da faaliyete ait değerler olarak alındığında bir zaman dizisi meydana gelir. Y-değişkeni için çeşitli örnekler alınabilir.Yıllık buğday üretimi,bir malin satış miktarı, stok miktarı,enerji tüketimi,yeni doğan çocukların aylık büyümeleri,bir dalyanda tutulan balık miktarı,sıcaklık gibi bir meteorolojik değişken.

Devletin ekonomi politikasının yönlendirilmesinde çeşitli değişkenlerin geçmişteki seyrinin bilinmesi,yakın gelecek ile ilgili tahminlerin yapılabilmesi,etkilerinin hesaplanabilmesi ile alınacak önlemler konusunda zaman serileri bize büyük yararlar sağlar.

Zaman serilerinin grafikler halinde gösterilmesi,zaman içinde meydana gelen değişmeleri gözle izleme olanağı yanında,zaman serisi çözümlemelerinde kullanılacak işlevsel(fonksiyonel) şekillerinin seçimi açısından da önemlidir. Serinin grafikte görülülen seyri,örneğin: en küçük kareler metoduyla uygulanacak trentin doğrusal mı, üstel mi olması gerektiğini kararlaştırmada rol oynayacaktır.Ayrıca grafikle göstermede yatay eksen zamanı gösterdiğine göre,dikey eksende yer alan ölçeğin aritmetik mi,logarıtmik mi olması gerektiği de karar verilmesi gereken bir konudur.Zaman serisinde yer alan rakamlar,birbiriyle karşılaştırılabilir olmalıdır.Örneğin: işçi,otomobil üretimi.

ZAMAN SERİLERİNİN UNSURLARI :

Seri,zaman ile zamana bağlı olarak değişen çeşitli değişkenlerin etkilerini taşır.Zaman serilerinin analizinden bu serilerin unsurlarının çeşitli metodlarla ayırt edilmesini anlıyoruz.İstatistikçiler,zaman içindeki bu değişiklikleri,dört sınıfa ayırmaktadırlar.Bir zaman serisinde bunlardan biri ya da birkaçı aynı anda etkili olabilir.Bunlar :

1- Uzun dönem eğilimi,sürekli değişme ya da genel eğilim (Tren (T))

2- Mevsimlik hareketler (Seasonal (S))

3- Devri değışmeler (Cyclical fluctuations (C))

4- Düzensiz değişiklikler (İrregular (I))

MEVSİMLİK DEĞİŞMELER

Genellikle zaman serisi analizlerinde, trend ıle mevsimlik hareketler elimine edilerek,devri durum öğrenilmeye çalışılır.Ancak Mevsimlık Değişmeler, ister başlı başına ilgilenilen bir konu olsun,isterse başka amaçların bir aşaması bulunsun,onları sihhatli ölçmek gerekir.

Mevsimlik değişmeleri saptamada kullanılan başlıca yöntemler şunlardır:

1- Hareketli ortalamaya oran yöntemi

2- Tren'e oran yöntemi

3- Zincirleme oranlar yöntemi

Pratikte daha çok ilk yöntem kullanılmaktadır.Bu usuller daha çok oranların hesabında farklılık gösterirler,Mevsimlik indexler içinde de aynı tarzda bulunur.

HAREKETLİ ORTALAMAYA ORAN YÖNTEMİ

Mevsımlik hareketlerin 12 aylık aralıklarla tekrarlandığı, dalgalanmaların bu sürede devrini tamamladığı farzedildiğinde,12'şerlik hareketli ortalama, mevsimlik değişiklikleri giderir, seriyi düzeltmiş hale getirir.

Hareketli ortalamalar yöntemiyle,orıjinal zaman serisi yerine çok daha düzenlı bir seyir takip eden yeni bir seri elde edilir.Böylece tesadüfi sebepler tamamiyle bertaraf edilmesi bile,hiç değilse tesırleri etkisizleştirilir.

12 aylık hareketli ortalama, aylık zaman serisinde bırbirini takip eden 12'şerlik terimlerin ardıl ortalamalarından meydana gelir,

TRENDE ORAN METODU

Mevsimlik indexler trend değerlerine dayanılarak saptanır.Zaman serilerini analize,mevsimlik değişmeleri elemine etmeden önce Trend tespit etmekle başlandığında bu metod kısa sayılır.Zaman serisinin trendi en küçük kareler yöntemiyle saptandıktan sonra orijinal serinin her terimi kaşşıtı olan trend değerine oran edilir ve sonuç yüzde olarak gösterilir.Diyelimki 1953 Eylül ayındaki gerçek değer 2311,trend değeri 2028 o halde

$$\frac{2311}{2028} \times 100 = 114 \text{ tür.}$$

Serimizdeki her yılın aylarına ait oranlar sağlanınca hareketlı ortalamaya oran yöntemindeki işlemlerin aynı uygulanır.Bu yöntem ternd de ani bir değişme gözlendiğinde daha çok terceh edilır.Yöntemin mahzuru,trendden sapmaların (Ortalamaları alınan yüzdelerin) hem devri,hem de mevsımlik ve düzensiz etkenleri ihtiva etmesidir.Trendde oranların ortalamasının devrı ve tesadüfi tesirleri tamamen yok edeceği farzedılir.Bu ise düzensiz dalgalanmalar büyük ölçüde kaybolsa bile, çok az vukuu bulan bir durumdur.Bu bakımdan mevsimlık indexler sıhhatli sayılmaz.

ZİNCİRLEME ORAN YÖNTEMİ

Aylık serılerın hepsi mevsimlik değişmeler göstermez.İndexlerin aydan aya farklılık göstermesi gerçekten bir mevsimlik modelin varlığını göstermez. Ayrıca gözlemler yılları kapsamalıdır.8 ıle 12 yıllık gözlemler minimumdur.Hava şartlarından doğan yıllık ritmik tekrarlamalar zaman boyunca oldukça sabittır. Ekonomik etkenlerin oluşturduğu mevsimlık moleller ise değişebilir.

DEVİRLİ HAREKETLERİN ÖLÇÜLMESİ

Devri ındexleri bulmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.Her devri hareketin kendine özgü özelliklerı vardır.Aynı düzen içınde ve aynı etkenlerle ortaya çıkmalarından dolayı devri değişiklikler ile mevsimlik değişiklikler bir sabit içinde ifade edilmektedirler.Devri hareketler 2 ila 8 yıllık dönemleri kapsayabilırler.

Biz burada kalan (Residual) yöntemini inceleyeceğiz.Zaman serimizi

$O = T \times S \times C \times I$ olarak göstermiştik.İrregular hareketler düzeltilmemiş ise

kalmaktadır.

Trend ve mevsimlik hareketlerin yanı sıra düzensiz hareketler de elimine edilmişse yüzde şeklinde ifade edilen sonuçlara devirli oranlar adı verilir. Residual yönteminde önce trend için düzeltme yapılır.

Sonra veri aylık ise,mevsimlik hareketler giderilir.Yani mevsimlik index değerlerine bölünür (yada çıkarılır).

kalmaktadır.Burada T x C, Trend ile devri hareketlerin birlikte mütalaa edilmektedir.

Devri hareketlerin tamamı ile izole etmek için düzensiz hareketleri de yok etmek gerekir.Dört unsur arasında eğer çarpım ilişkisi varsa.Buna göre sonucu I ya bölmemiz lazımdır.Ancak düzensiz hareketler (İrregular) ın saptanmış bir formülü yoktur.Öyle ise düzensiz hareketler doğrudan ölçülemezler.Bunlar yalnız düzeltilebilinir.Fakat bunları düzeltirken bir çok şeyi de yok etme tehlikesinin varlığı unutulmamalıdır.

Bununla beraber düzensiz hareketlerin etkisini gidermek için TARTILI HAREKETLİ ORTALAMA kullanılabilinir.

Tartılı hareketli ortalamanın avantajı:Seçilecek uygun tartılarla serinin ne derece düzleştirildiğini kontrol edebilmemizdir.

Düzensiz hareketler dolaylı olarak ölçülebilinir.Seriden üç unsur arındığında,

$\frac{C \times I}{I} = I$ izole edilebilir.Bununla birlikte uzun yıllar ortalaması tesadüfi hareketleri elimine etmek için yeterli görülebilmektedir.

Buraya kadar devri hareketlerin nasıl izole ve tasvir edildiğini anlatmaya çalıştık. Bunlar yapıldıktan sonra devirli oranlar çeşitli analizlere konu olur.Örneğin : Araştırıcı devirli modeli düzenli tekrarlanan devrelere ayırmak isteyebilir.Yada birden fazla seri arasında bir korelasyon olup olmadığını araştırabilir, yada serilerin devreleri arasındaki zaman aralığı (Lag) na aralığına ilgi duyabilir.Böylece bir serinin, ötekinin göstergesi yada önceden haber vericisi olarak kullanılıp kullanılmıyacağı öğrenilebilinir.

TREND

Trend bir zaman serisinin uzun dönemdeki hakim eğilimidir.Nüfus artışı, biyolojik büyüme, teknolojik değişme gibi faktörlerin etkisi ile seri uzun dönemde artma yada azalma eğilimi gösterebilir.Bu egilimin ortaya çıkarılabilmesi için zaman serisinin oldukça uzun dönemde izlenmesi gerekir.

Trend'ın uyacağı fonksiyonel formül seçimi,zaman serisinin grafiğinın çiziminin takiben yapılır.Orijınal serinin trend değerlerıne bölünmesi ile geriye yıllık serilerde devri hareketlerin ve düzensiz hareketlerin,aylık serilerde ise; bunlara ek olarak mevsimlik hareketin etkileri kalır.Trendin varlığının nasıl teste tabi tutulacağını ve trend hesaplamalarının nasıl yapılacağını görelim.

Başlangıç ve bitiş yıllarının devri hareketin aynı safhasına gelmesine dikkat ederek seçilmiş bir dönemde trend hesaplaması şu yöntemlerle yapılır.

1- Freehand yöntemi

2- Yarı ortalamalar yöntemı

3- Hareketle ortalamalar yöntemi

4- En küçük kareler yöntemi

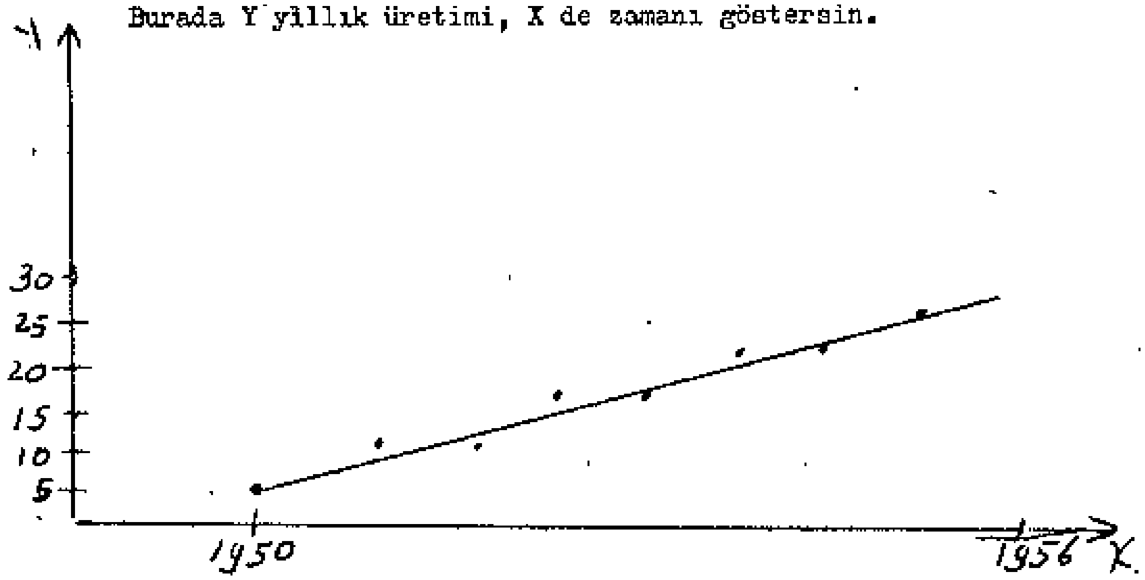
Biz bunlardan hareketli ortalamalar yöntemini daha önce gördük.Şimdi Freehand yöntemi ile yarı ortalamalar (semiavarage) yöntemine bir göz atıp en küçük kareler yöntemine geçeceğiz.

FREEHAND YÖNTEMİ

Bir zaman serisi dataları verıldiği zaman bundan bir trend çizgisi bulmanın en basit yöntemi Freehand yöntemidir.Bu yöntem bir X-Y ekseni üzerinde eldeki dataları işaretleyerek zaman serısinın trendıni gösteren doğru çizgiyi elde etmekten ibarettir.

Yıl	X	Y (Milyon kilo)
1950	0	5
1951	1	8
1952	2	12
1953	3	15
1954	4	20
1955	5	25

Burada Y yıllık üretimi, X de zamanı göstersin.



Trend çizgisinin 1950 den 1956 ya doğru gittiğini düşünelim.Burada sorun yani trend çizgisini bulma sorunu, 1950 ile 1955 noktalarından geçen doğru çizgisı için bir denklem bulma sorunu olmaktadır.

Eğer doğru hiç bir noktadan geçmiyorsa,düz doğru üzerinde iki nokta seçilir ve grafikle koordinatları saptanarak, sonra bir denklem elde edilmeye çalışılır.

Zaman serilerinin bır karakteristiği, dataların zamana göre verilmesidir.Bizim örneğimizde bir yıllık aralarla 1950 den başlıyor, 1955 e değin sürüyor.Burada datalar için sıra numaraları atadığımızı kabul edelim ve orijin olarak 1950 yi alalım ve bunu sıfır gibi düşünelim.Sonra 1951 e 1 diyelım.1952 2...

Şekilde görüldüğü gibi orijini sıfırdan 1950 ye taşıyalım ve 1950 yi yeni orijin olarak kabul edelim.

Burada açıkca belli kı orğjin olarak herhangi bır yıl alınabilir. Eğer 1951 i orijin olarak kabul etseydik 1950,-1; 1951, 0; 1952, 1;1953 2 olacaktı.Şimdi seçilen ikı noktanın koordinatları (0,5) ve (5,23) dür.

Doğru hattı için denklemleri çözdüğümüzde :

$$5 = a + 0b \Rightarrow a = 5$$
$$23 = a + 5b \Rightarrow b = 3,6$$
$$Y_c = 5 + 3,6X$$

Orijin : 7/1/1950

X : 1 yıl

Trend hattı

$Yo = 5+3,6X$

Orijin : 7/1/1950

X: 1 yıl.

Burada Yc denklemden elde edilen Y değerlerini göstermektedir ki,gerçek değer değil,ama hesaplanmış ya da tahmin edilmiş değerlerdır.Genel bu denklemin anlamı yalnız X in özel değerleri ile örijine göredir.

Alışılagelen yol, yılın orta noktasını almaktır.

Örneğin: Y=5.000.00 kg. ise X=0 (1950) bu nokta 7/1/1950 yi göstermekteri.Bu durumda denklem

$Yc=5+(3,6)\ (0)= 5$

trend hattı tahmini 5.000.000 kg.olduğunu göstermektedir.Bu durumda tahmini ürün Yc=5.000.000 kg.gerçek üretim denklemidir.

X=3 olduğu zaman (1953)

$Y_c = 5 + (3,6)\ (3) = 15,8$

1953 için gerçek ürün $Y_{53} = 15$ dir.

Burada $Y_c - Y_{53} = 15,8 - 15 = 0,8$ lik fark vardır.

$b = 3,6$

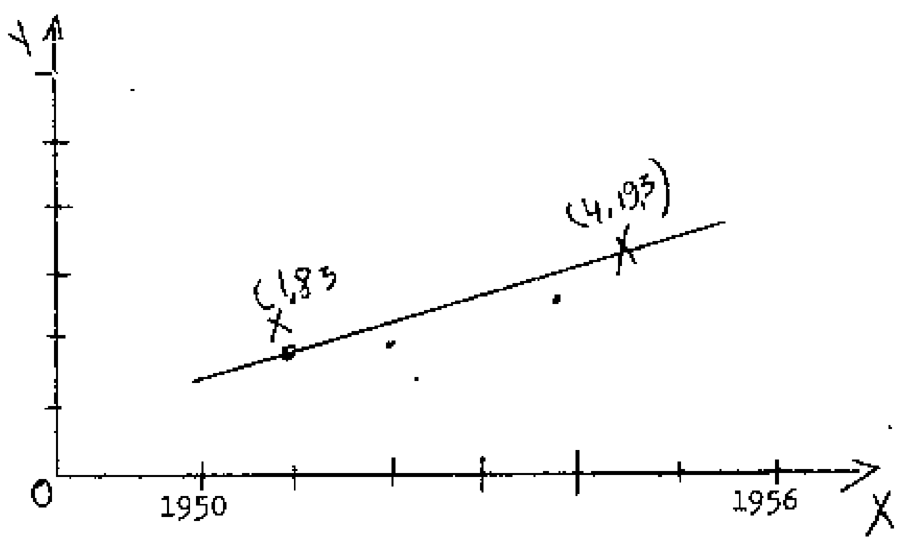
Tahmin edilen yıllık ürün artışı + 3.600.000 kg dır.

SEMİAVARAGE YÖNTEMİ

Bu yöntem,zaman serisini iki parçaya ayırmak ve her parçanın ortalamasını bulmak,sonra da bu ortalamalardan geçen bir trend hattı uydurmaktır. Aynı dataları kullanalım :

Yıl	X	Y	
1950	0	5	
1951	1	8	$\frac{25}{3} = 8,3$
1952	2	12	
1953	3	15	
1954	4	20	$\frac{58}{3} = 19,3$
1955	5	23	

Her parçanın ortalaması 8.300.000 ve 19.300.000 kg.8.300.00 1950,1951,1952 yıllarının ortalamasıdır ve 1951 de işaretlenmektedir.Aynı şekilde 19.300.000 de 1954 e işaretlenmektedir.Doğru hattı bu iki noktadan geçecektir. (1,8,3) ile (4,19,3)



1950 X = 0 için tahmini ürün :

$Yc = 4,6 + (3.7)\ (0) = 4,6$

gerçek üretim Y50 : 5 idi.Böylece,gerçek ile tahmini üretim arasında;

. Yc-Y50:4,6 - 5,0 : 0,4 kadar bir fark vardır. D:3,7 yıllık ürün artışıdır.

Yıl sayısı tek olduğu zaman,seri bölünemez.Ortadaki yıl serinin bir tarafından kalır.Seriyi bölebilmek için extrem bir değer trend doğrusunun dışında kalabilirki, bu değer seriden çıkarılabilinir.Örneğin: Çelik üretiminde uzun grevlerin olduğu bır yıl da (dışşal bir nedenle) üretim çok düşük olabilir.Bu gibi durumlarda o yıla ait değer çıkarılmalıdır.Bu Semiavaraga yöntemi trend'i elde etmenin kaba ve basit bir yoludur,ama elde edilmesi kolay ve avantajladır.

HAREKETLİ ORTALAMALAR YÖNTEMİ

Bir zaman serisindeki dalgalanmayı düzleştirmek için kullanılan hareketli ortalama,yalnız trend için değil,aynı zamanda mevsimlik ve devri (Cyclical) değişiklikleri elimine etmek için baş vurulan bir yöntemdir.Şimdi bunu tablodan üç yıllık hareketli toplamlarını bulalım.

Yıl	Satış M.Lira	3 yıllık H.Toplam	3 yıllık Hareketli ort
1947	3	15	5
1948	4	18	6
1949	8	21	7
1950	6	24	8
1951	7	27	9
1952	11	30	10
1953	9	33	11
1954	10	36	12
1955	14		

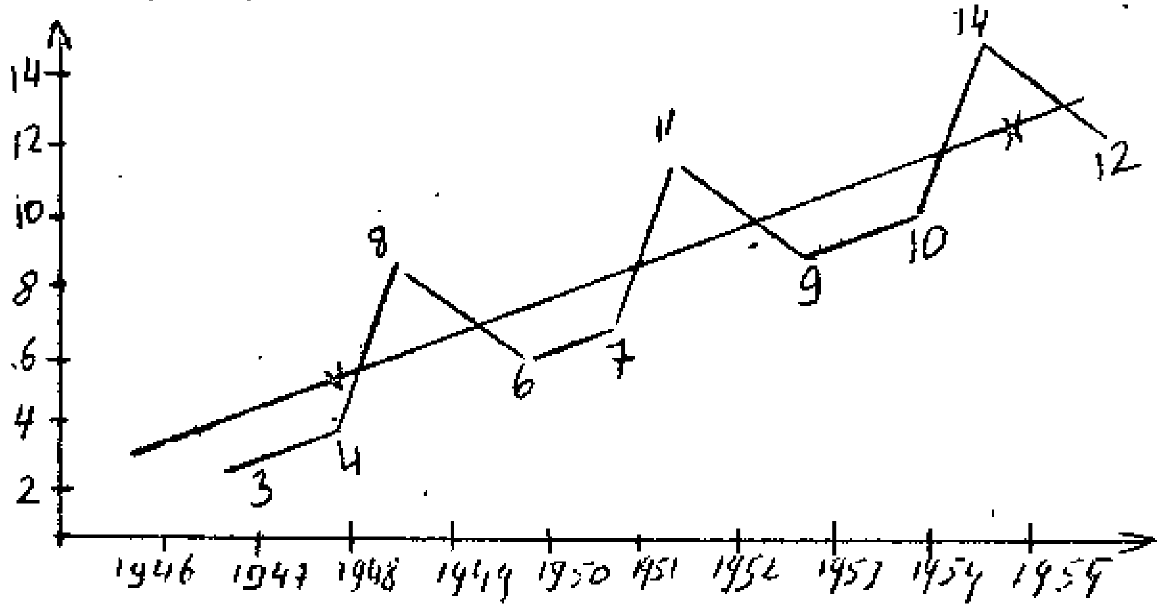
1947,48,49 için :

3,4,8 : 15

Bu 15.000.000 ortadaki yıla girmektir.Bundan sonraki toplam

4 8 6 : 18 buda ortadaki yıl olan 1949 a girmektedir.Bu şekilde devam

edildiğinde görülürki : 1947 ile 1956 için elimizde bir değer bulunmamaktadır.



Grafik 3 : yıllık düzenli devirlere sahip satışları göstermektedir. Görüldüğü gibi 1949 daki zirve noktayı 1952 izlemekte,ondan 3 yıl sonrada 1955 de tekrar zirveye ulaşılmaktadır.Grafik üzerinde 3 yıllık hareketli ortalamalar alındığında zirve noktalar düz-doğru üzerine düşecektir ve devri dalgalanmalar düzleştirilmiş olacaktır.Bu düz-doğru bizim aradığımız trend doğrusudur.Böylece varsayısal verilerimizi düzeltmiş,trend(den düz bir doğru elde etmiş olmaktayız.

Biz niçin bir düzleştirilmiş eğim elde etmeye çalışıyoruz ? Şunun için : Bizim verilerimizi , aynı genişlik ve zaman sürelerinde düzenli devri hareketlere sahiptir.Burada verilerimizin 3 yıllık düzenli devır gösterdiğine dikkat etmelidir. Eğer devri süreler 4 yıl olsaydı,bizde 4 yıllık hareketli ortalamalar seçecektık.Biz bir devirlik bir hareketin yarısının,devirlik hareketin orta noktasının üstünde,yarısının altında kaldığını ummaktayız.Böylece bir ortalama alındığı zaman,devri etkiler giderilmiş olacaktır ve eğer devri hareketin orta noktasının üstünde kalan yarı,altta kalandan daha büyükse, (bizım örneğimizdekı gibi) hareketli ortalama yükselen bir trend gösterecektir. Bu yüzden,eğer hareketli ortalama etkili bir genişliğe sahipse,önce düzenli, periyodik devri hareketin var olup olmadığını saptamak gerekli olmaktadır.

Pratikte,devri hareketlerin varlığı söz konusu olduğunda,devirlerin sürelerinin genelliklo çok düzenlı olmadığı,fakat bir çok nedenlerden,hareketli ortalamalar yöntemini kullanmanın yeterli olduğu bildirilmektedir.

-10-

Elde edilen trend'in bir düz-doğru olduğuna dikkat edelim. Eğer serimiz lineer ise, düz bir doğru elde edeçeğiz, eğer zaman serimiz curvilineer ise, trend'de bir eğri gibi görülecektir.

Hareketli ortalamalar yöntemi trend için değil, düzenli periyodik dalgalanmalar gösteren bütün veriler için uygulanabilir. Mevsimlik değişiklikleri elimine etmede kullanılacaktır.

EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

En küçük kareler yöntemi, veri serileri için bir düz-doğru elde etmede yöntemlerinin en fazla kullanılanıdır. Burada önce bağımsız bir değişken ile bağımlı bir değişken üzerinde durup, daha sonra konuyu genişletelim. Hesaplanmış trend doğrusu Yo, trend'den (hesaplanmış değerler) gerçek gözlemlerin trend'den sapmalarına α, β, γ diyelim. Hesaplanmış trend doğrusu Yc olsun.

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ minimum olacak, denklemimiz

$Y_c = a + bX$ dır. Burada biz a ile b'yi bulmak isteriz.

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

Şimdi bunların nasıl kullanıldıklarını görelim.

Yıl sayısı teksi :

Elimizde yıllık petrol üretimine ait veriler olsun. Bu verilerden en küçük kareler yöntemiyle bir düz trend doğrusu elde etmek istiyoruz. a ile b parametreleri formül (1) den bulunmaktadır. a ile b yi bulmak için

ye gereksinim duymaktayız. Bu değerleri bulmak için tablomuzu kuralım.

Yıl	X	Y	XY	X^2
1950	-2	5	-10	4
1951	-1	8	- 8	1
1952	0	12	0	0
1953	1	15	15	1
1954	2	20	40	4
		60	37	10

görüldüğü gibi,tabloyu X:0 olacak şekilde kurduk.Çünki bu şekilde a ile b yi b x bulmak çok kolaylaşmaktadır.Öteki değerlerimiz XY :37, X:10 olarak bulduk. Yılların sayısına n diyelim.Burada n:5 tir.Formü (1) den a ile b yi çözelim.

Böyleçetrend denklemi :

Yc:12+3,7X

Orijin :7/1/1952

X:1 yıl.

Burada $\Sigma X:0$ yapmakla

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

$$\Sigma Y = na$$

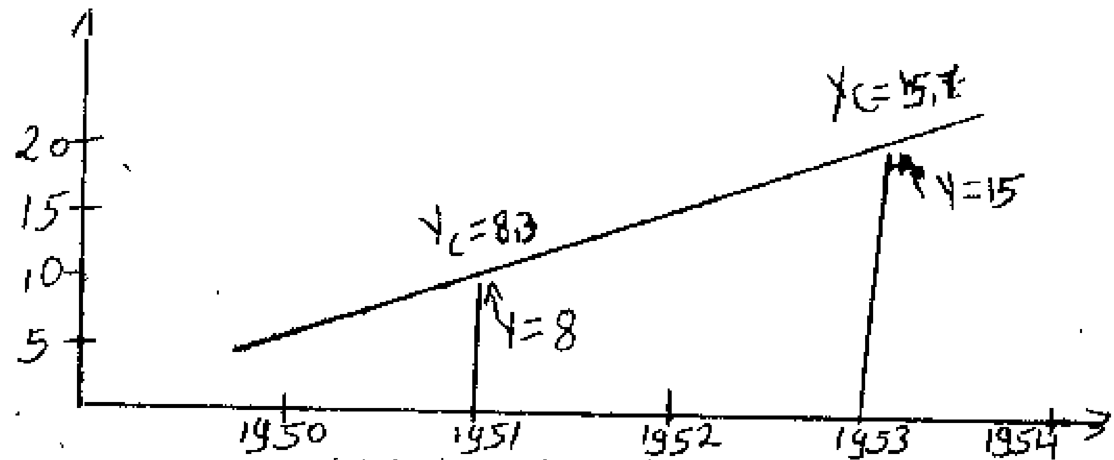
$$\Sigma XY = b\ X^2$$

Denklemlerini şekline dönüştürmüş olduk.

a ile b yi bulduktan sonra trend hattımızı kolayca çizebiliriz.Yatay eksen 1950,1951 vs. göstersin.

X -1 için $Y_o = 12 + (3,7)(-1)$ 8,3

X 1 " $Y_o = 12 + (3,7)(1)$ 15,7



Trendimız (-1,8,3) ile (1,15.7) noktalarından geçecektir.Örneğimizdeki yıllık petrol üretimi almışsa petrol üretimindeki tahmini yıllık değişme b:3.7

Tahmini üretim 1954 için

Yo:12 (3.7) (2): 19.4 tondur.

Yıl sayısı çift oldağunda:

Yılların sayısı tek ya da çift olduğunda zaman serileri için en küçük kareler yönteminin uygulanışı arasında fark vardır.

Petrol üretimine ait aşağıdaki datalara sahip olduğumuzu farzedelim. Burada şimdi 6 yıllık değerımız var. $X=0$ yapmak için X i numaralamanın bir kaç yolu vardır. Bu yollardan biri yılları tabloda görüldüğü gibi 1,3,5 şeklinde numaralamaktır. Biz -3,-2,-1,2,3 şeklinde numaralamalıyız. Çünki -1 ila 1 arasında 2 birim vardır. (-1,0,1), halbuki 1,2,3 her bir birimle değiştirilmektedir.

Şimdi $\sum X = 0$, ve biz formüllerimizi kullanabiliriz.

$$\sum xY = 139, \sum X^2 = 70$$

n = 6 (3) nolu denklemi çözdüğümüzde

$$a = \frac{\sum Y}{n} = \frac{85}{6} = 14,2$$

$$b = \frac{\sum xY}{\sum X^2} = \frac{139}{70} = 1,99$$

Trend

$$Y_c = 14,2 + 1,99\ X$$

Orijin = 1 / 1 / 1953

X=1/2 yıl (6 ay)

Buradaki iki değişikliğe dikkat etmeliyiz.

Birincisi : Orijin 7/1/1952 ila 7/1/1953 arasındadır. Bu yüzden orijin 1/1/1953 e gelmiştir.

İkincisi : X ler 1/2 yıl (6 aylık) birimlerdir. Çünkü X ler 1,3,5 diye etiketlenmiştir ve her yıl 2 birimle değişir. Başka bir deyişle, 7/1/1953 ten 7/1 /1954 e giderken X 1 den 3 e gitmektedir. (2 ye değil) 1/1/1954 e 1/2 yıl gittiği zaman, X sadece 7/1/1953 ten 1/1/1954 e 1/2 yıl gitmektedir. Keza şunun anlamı :

b = 1,99

Tahmini artış = 1/2 yıl

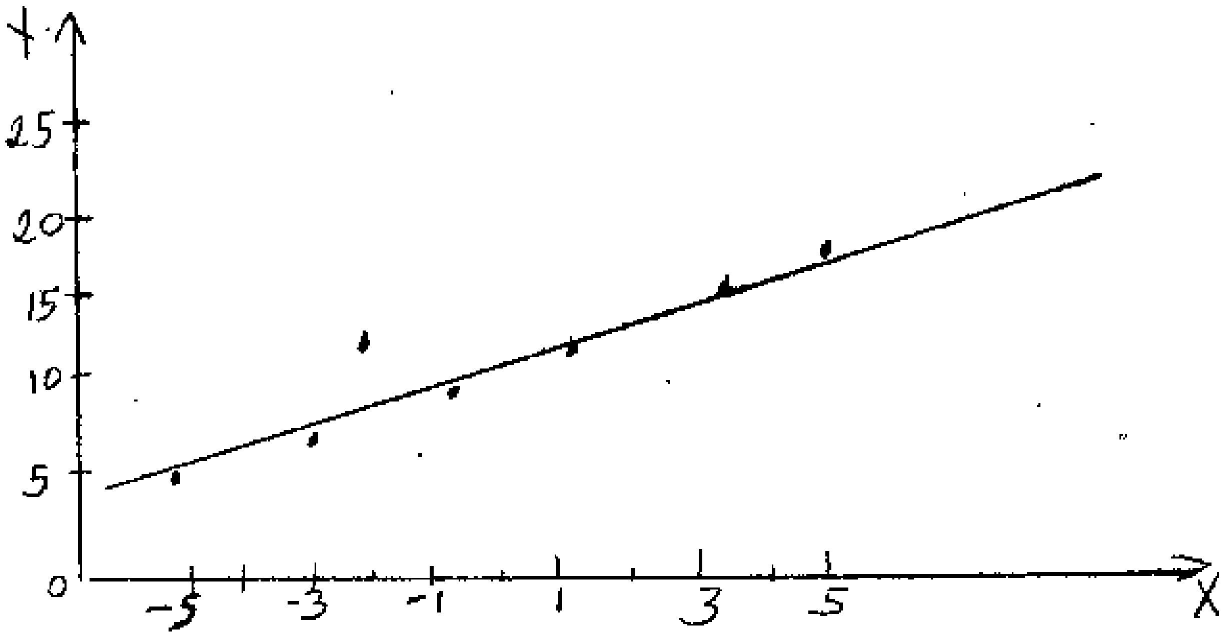
1954 için tahmini petrol üretimi :

$$Y_c = 14,2 + (1,99)\ (3) = 20,17$$

1955 için

$$Y_c = 14,2 + (1,99\ )\ (5) = 24,15$$

Yıl	X	Y	XY	X^2
1950	-5	5	-25	25
1951	-3	8	-24	9
1952	-1	12	-12	1
1953	1	15	15	1
1954	3	20	60	9
1955	5	25	125	25
	0	85	139	70



X' leri numaralamanın bir başka yolu da, 1/2 şeklinde artırmaktır.

-5	-3	-1	1	3	5
-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5

İkinci sistem kullanıldığı zaman X' ın birimleri 1/2 yıl yerine 1 yıl olmaktadır. 1/2 yıllık birimleri önlediği için bu sistemi kullanmak tercih edilmekte dir.

BİRİM DEĞERLERİNİ DEĞİŞTİRMEK VE ORİJİNİ KAYDIRMA

Birim değerleri değiştirme

Buraya kadar gördğümüz zaman seresi verileri ile denklemler yıllık toplamlardır.Fakat bir çok sebeplerden veriler,aylık veriler ya da yıllık aylık ortalamalar gibi verilmektedir.Yıllık toplam,bir yıllık aylık ortalama,aylık veri ve bunların trendleri,denklemleri birbirinden farklıdır.

Bir kişının 1955 yılında yıllık 6.000 lık maaşla bir işe girdiğini farzedelim.Bu kişinin maaşı 1956 da 7200, 1957 de 8400 liraya çıksın.

1955 yılı için aylık ortalama maaşı 500, 1956 için 600, 1957 için 700 liradır.Böylece aylık ortalama maaşı her yıl 100 lira artmaktadır.

Aylık ortalama maaşında 100/2 8,33 liralık aylık bir artış vardır. Bu verilerle 3 denklem kurabiliriz.

1) $Y_c = 6000 + 1200\ X$

$X = 0$, 1 Temmuz 1955

Burada $X = 1$ yıllık birimdir.

Bir yıldaki aylık ortalama

2) $$Y_c = \frac{600}{12} + \frac{1200}{12} X$$

$Y_c = 500 + 100\ X$

$X = 0$, 1 Temmuz 1955

Burada $X = 1$ yıllık birimdir.

3) Aylık denklem

$$Y_c = \frac{6000}{12} + \frac{1200}{12x12} X$$

Y_c 500 8,33 X

X = 1 aylık birim, 1 Temmuz 1955

2 nolu denklemdeki b katsayısı 1200/12 = 100 aylık ortalama maaşın yıllık artışını göstermektedir.

3 nolu denklemdeki b katsayısı 1200/12 12x12= 8,33 aylık ortalama maaştaki her aydaki artışı göstermektedir.

Bu yüzden bir trend ifade eden denklem verildiğinde bu üç tip denklemden hangisine uyduğu düşünülmelidir.

Denklem (3) e dikkat: Orijini 1 Temmuzda bıraktık. Datalarımızı aylık denkleme uydurmak için orijini 15 Temmuza taşımamız gerekmektedir.

Bir çok zaman serisinde aylık ortalama verileri görülmektedir.

Örnek 1: Bir firmanın radyo üretimine ait yıllık toplam denklemini

$$Yc = 144 + 72\ X$$

Orijin 7/1/1958

X 1 yıllık birim

1958 de tahmin edilen toplam 144x100

1959 da tahmin edilen toplam

$$144+(72)\ (1) : 216$$

$$216 \times 100$$

b: 72, yıllık tahmini artışı göstermektedir.

Bir yıldaki aylık ortalama denklemi aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$Y_c = \frac{144}{12} + \frac{72}{12} X$$

$$Y_c = 12 + 6\ X$$

Origin : 7/1/1958

X : yıllık birim

Bunun anlamı 1958 de tahmin edilen aylık ortalama 12x100

1959 da Yc:12+(6) (1):18

1959 da her ay ortalama 18 x 100 kadar bir artış olmaktadır.

b: 6 nın anlamı her yıl, aylık ortalamadaki tahmini artış 6x1xx olmaktadır.

Aylık denklem : $Y_c = 12 + \frac{6}{12} X$

Yc:12+0.5 X orijin :7/1/1958 X:1 aylık birim.

7/1/1958 için bir aylık üretimi göstermektedir.

Şimdi orijini 7/15/1958 e kaydıralım. Yani 1/2 ay ileri alalım, 7/15/1958 için üretim.

aylık denklem: Yc:12.25+0.5X

Orijin :7/15/1958

X :1 aylık birim.

Bunun anlamı temmuz 1958 için tahmini üretim.

Yc : 12.25+ (0.5) (0) : 12.25

Ağustos ayı için ise :

Yc : 12.25 (0.5) (1) :12.75

Haziran ayı için H

Yc : 12.25 (0.5) (-1) : 11.75

Örnek II :

Şöyle bir tablo ile verilen değerlerdan bir firmanın aylık ortalama üretimini en küçük karaler yöntemiyle bulmaya çalışalım.

Yıl	X	Y Aylık ortalama	XY	X^2
1953	-2	4	-8	4
1954	-1	77	-7	1
1955	0	8	0	0
1956	1	10	10	1
1957	2	15	30	4
	0	44	25	10

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{44}{5} = 8,8$$

$$b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{25}{10} = 2,5$$

1956 için tahmini aylık üretim.

$Y_c = 8,8 + 2.5(1) = 11.3$

1956 için yıllık toplam üretimi.

$(11,3 \times 12) \times (100) = 135,6 \times 100$

$Y_c = 8,8 + 2,5\,X$

7/1/1955

X = 1 yıl.

-17-

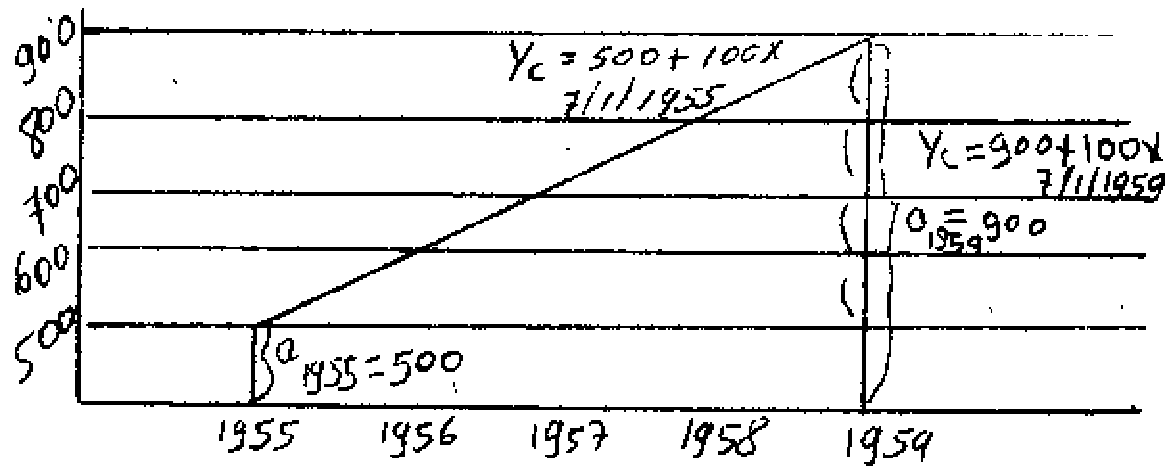
Orijini Kaydırma :(Shifting the orijin):

Tekrar maaşla ilgili aylık ortalama denklemimize dönelim.

Yc : 500 + 100X   7/1/1955

X: 1 yıl

Orijini 7/1/1959 a kaydırmak istediğimizi düşünelim. Orijini 1959 a kaydırmak demek Y için yeni bir a 59 katsayısı bulmak demektir.



$a_{1959} = 500 + (100 \times 4) = 900$

$Y_c = 900 + 100X$ 7/1/1959 $Y_c = 500 + 100(+4) = 900 + 100X$ şeklinde gösterebiliriz

Daha önce bir ternd doğrusu

Yc + a + bX şeklinde gösterilmişti.

Basit lineer trend doğrusu kadar sık olmamakla beraber iş hayatında bilimsel çalışmalarda ve ekonomide şunlar da kullanılmaktadır.

1) İkinci derecede parabol

2) Logaritmik (exponential) eğri.

3) Değiştirilmiş exponantial eğri.

4) Logistik eğri

5) Gompertz eğri

6) Hareketli ortalama

İkinci derece parabol

Orijinal seri bir gragik üzerine işaretlandiği zaman bir doğrudan daha çok bir parabole uyum gösterebilir. İkinci dereceden en basit en basit parabol denklemi

Birinci differencesi biz cebirsel olarak

$$\Delta Y_i = (a+bX_i+cX^2_i) - (a+bX_{i-1}+cX^2_{i-1})$$

$$= b(X_i - X_{i-1}) + c(X^2_i - X^2_{i-1})$$

$$= b + c(X_i + X_{i-1})$$

$X_i - X_{i-1} = 1$dır

İkinci differences için

$$\Delta^2 Y_i = \Delta Y_i - \Delta Y_{i-1}$$

$$= c(X_i - X_{i-2}$$

$$= 2c$$

Görüldüğü gibi ikinci differences'i sabittir.Genellikle n'inci dereceden parabolık bir denklemin n'ıncı differences'i bir sabittir.

Bu özellikleri kullanarak,serilerin birinci differencesların yaklaşık olarak bir sabit olarak kabul edebiliriz.Dolayısıyla seriyi bir lineer doğrusal trend doğrusu olarak kullanabiliriz.Eğer ikinci differencesleri de yaklaşık,bir sabit olarak kabul edersek ikinici dereceden parabolik bir denklemi kullanabiliriz.

Keza,seçilmiş noktalar yöntemi ile yarı ortalamalar yöntemi,parabolik trend eğırisini bulmak için kullanılabilir.

Seçilmış noktalar yönteminin işlemi bir freehand eğirisi çizmektır. Bu eğri üzerinde 3 nokta seçip,bu noktaları kullanarak 3 denklem kurulur ve a,b,c katsayıları için bu denklemler çözülür.

Yarı ortalamalar yöntemi,seçılmış noktalar yönteminin aynıdır.Yalnız bunda 3 nokta seçilmeyip 3 grup içinde en fazla ifade (spilitting time seri) eden 3 gurup seçilmektedir.

Bu gurupları ortalamaları bulunarak bu ortalamalar katsayıları saptamada kullanılmaktadır.

Exponentıal ya da logaritmik trend

$Y : ab^X$ şeklinde gösterilmektedır.

Popülasyon büyümesi gibi geometrik olarak büyüyen göstergelerin serilerin trend doğrusunu bulmak için kullanılmaktadır. Burada $b > 1$ olduğu zaman X sonsuza giderken Y değeri artacaktır, $b < 1$ olduğu zaman Y sıfıra yaklaşacaktır.

$Y = ab^X$ logaritmasını aldığımızda bir lineer fonksiyon almaktadır.

$$Log.Y + A+BX$$

Burada log.a= A, log.b=B

En küçük kareler yöntemini uygularsak a ve b katsayılarını buluruz.

Burada $\sum (\log Y - \log Y_c)^2$ Minimum olacaktır.

Log Y: A+BX bir yarı log. ölçeği üzerine işaretlendiği zaman bir doğru hattı elde edilir. Bu hattın eğimi log.b dir. Burada b, Y nin artış oranı olarak düşünülebilir.

Bu karakteristik kullanılarak, geometrik bir sıra gösteren datayı yarı logaritma ölçeği üzerine çizebiliriz ve grafiksel bir doğru hattı uydurabilir ve bu grafikle de log.b yi tahmin edebiliriz. Bulduğumuz bu b, Y nin artış oranı olacaktır.

$\sum \log.Y = A + BX$ demiştik. Bunun normal denklemleri :

$$\sum \log Y = n \log a + (\log b) \sum X$$

$$\sum X \log Y = (\log a) \sum X + (\log b) \sum X^2$$

Orijini $\sum X = 0$ olacak şekilde seçersek, bu normal

Denklemler

$$\log Y \quad n \log a$$

$$X \log Y \quad (\log b) \quad X^2$$

Şimdi varsayılı verileri kullanarak bunun hesaplamasını sürecini göstermeye çalışalım.

Yıl	X	Y	log Y	X log Y	X^2
1955	-1	2	0,3010	-0,3010	1
1956	0	8	0,9031	0	0
1957	1	40	1,6021	1,6021	1
		50	2,8062	1,3011	2

buluruz.

$$\log a = \frac{1}{n} \Sigma \log Y = \frac{1}{3} \; (2,8062) \; 0,09354$$

Buradan a 8,62 $\log b \; \frac{\Sigma X \log Y}{\Sigma X^2} = \frac{1,3011}{2} = 0,6505$

b 4,47

Böylece üslü trend doğrusu

$\log Y_c = 0,9354 + 0,6505 \; X$

ya da $Y_c \; (8,62) \; (4,47)^X$

Orijin X= 0 7/1/1956

Yc değerleri şu şekilde hesaplanmakta

X	0,6505 X	log Y_c	Y_c	Y
-1	0,6505	0, 2849	1,93	2
0	0	0, 9354	8,62	8
1	0,6505	1, 5859	38,54	40

Hesaplanan denklem şu şekilde de gösterilebilmektedır.

$Yc = 8,62 \; (1 \quad 3,47)^X$

ve r:3,47 artış oranıdırki bu % 347 büyüme oranıdır. Görüldüğü gibi tahminin amacı için küçük bir extrapolasyon miktarı bile, çak büyük sonuçlar doğurabilir.

Değiştirilmiş üslü trend (modifiye edilmiş)

k gibi bir sabitin eklenmesiyle değişık bir üslü trend elde edilmektedir.

$Yc = k+ab^{X}$

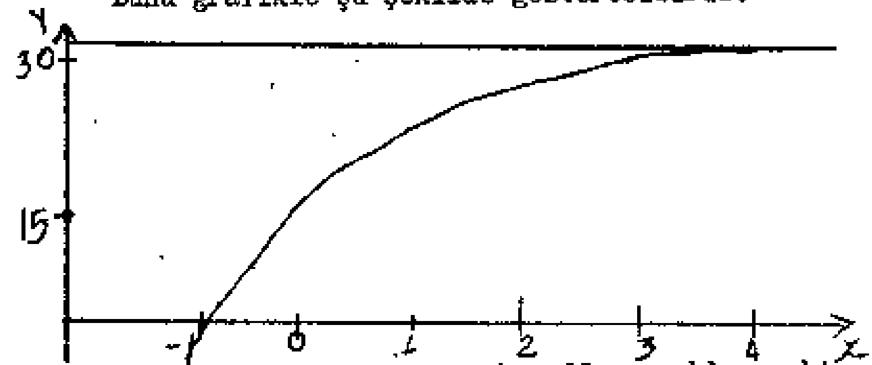
Örneğin ; k: 32, a -16 b 1/2 olsun

$Y_c \;\; 32 - 16(1/2)^{X}$

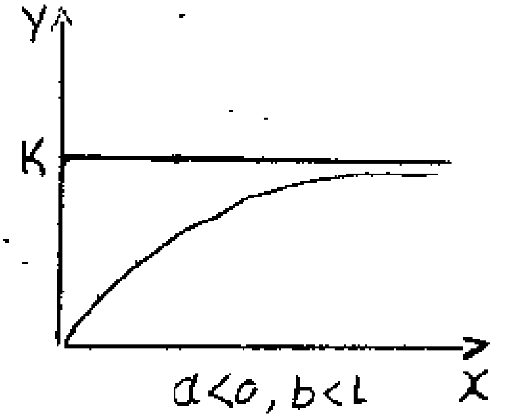
sonra X = -1,0,1,2,3,4 için Y yi bulalım.

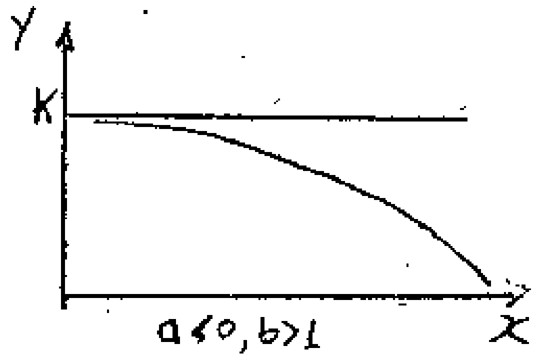
X	-1	0	1	2	3	4
Y	0	16	24	28	30	31

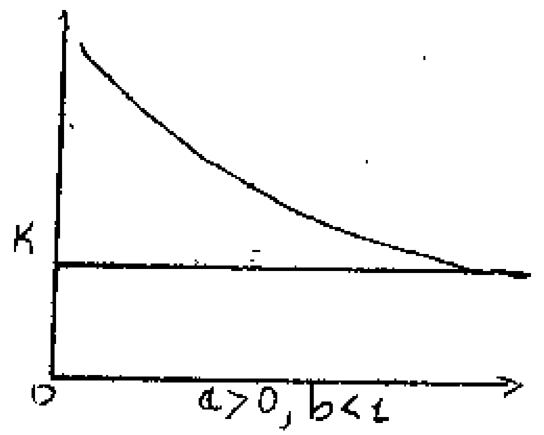
Bunu grafikle şu şekilde gösterebiliriz.

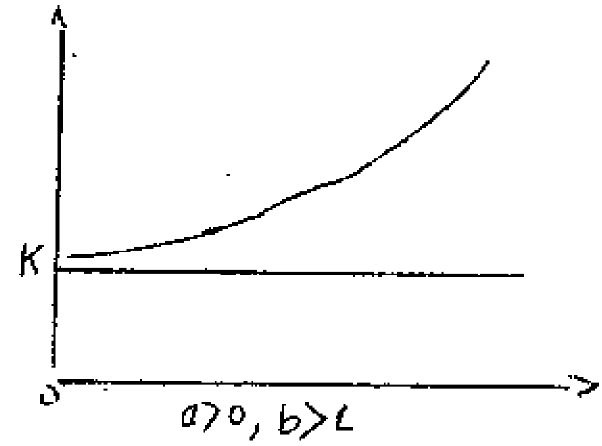


X sonsuza giderken k = 32 ye yaklaşacaktır. Burada k ya üst asmptote denilmektedir. b nin farklı değerleri birleştirildiğinde ve a parametresinin negatif vepozitif değerleri almasına göre 4 durumla karşılaşılmaktadır.









Birinci differences'leri

$$\Delta 1 = Y_{c_2} - Y_{c_1} = ab^2 - ab = ab\ (b-1)$$

$$\Delta 2 = Y_{c_3} - Y_{c_1} = ab^3 - ab^2 = ab^2(b-1)$$

$$\Delta 3 = Y_{c_4} - Y_{c_3} = ab^4 - ab^3 = ab^3(b-1)$$

Böylece birinci differenceslerin oranları

$$\frac{\Delta 2}{\Delta 1} = \frac{ab^2\ (b-1)}{ab\ (b-1)} = b$$

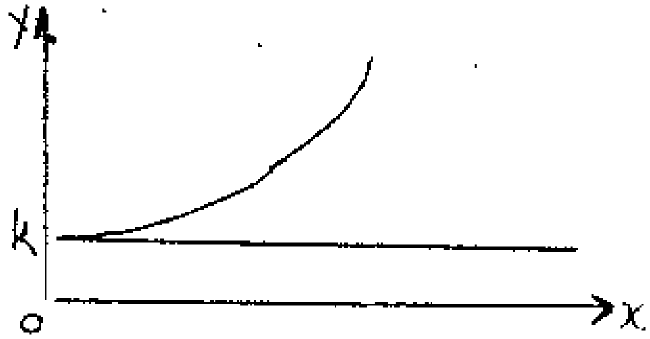
$$\frac{\Delta 3}{\Delta 2} = \frac{ab^3\ (b-1)}{ab^2\ (b-1)} = b$$

Genellikle bu elde edilmektedir. Daha önce de söylediğimiz gibi b, büyüme oranının bir ölçüsü olarak kabul edilebilir.

Değiştirilmiş (modifiye edilmiş) üslü eğriler bir lineer forma kolayca transform edilemediğinden k, a ve b katsayılarını almak için en küçük kareler yöntemi kullanılmamaktadır. Bunun için daha basit bir yöntem gösterilecektir. Ki bu yayılma diyagramına bir freehand eğrisi uydurulur, sonra k, a ve b katsayılarını tahmin etmek için 3 nokta seçilmektedir. Şimdi bu işi yaparken iki değişiklik yönteme gösterilmiş olunacaktır, bundan biri, seçilmiş noktalar yöntemini kullanma, ikincisi de yarıortalamalar yöntemini kullanmadır. Basit bir örnek ile göstermeye çalışalım.

Önce verilen dataların ılk differenslerini ve oranlarını bulalım,sonra da oranların bir sabit olmaya yönelip yönelmediğini görelim.Şayet freehand eğirisi en alt ve en üst limitlere yaklaşmakta ise bunu,değiştirilmiş üslü eğri ye uydurmaya çalışalım.

Amacımızı anlatabilmek için şöyle bir eğri düşünelim.



Eğrinin şekli a 0 b 1 olduğunu gösdermektedir.Seçilmiş noktalar yöntemini geliştirelim ve üç nokta seçelim,eğrinin üzerinde. X = 0 X = 2 ve X = 4 sonra bu noktaları P1, P2 ve P3 ile gösterelim.

P1 : k+a

p2 : $k+ab^2$

P3 : $k+ab^4$

Elimizde 3 denklem ile 3 bilinmeyen vardır.Bu denklemleri çözerek a,b ile k yı bulabiliriz.

$$b^2 = \frac{P_3 - P_2}{P_2 - P_1}$$

$$a = \frac{P_2 - P_1}{b^2 - 1}$$

$$k = P_1 - a$$

Eğer P1,P2 ile P3 arasındaki yıl sayılarını t ile gösterirsek,formüllerimiz

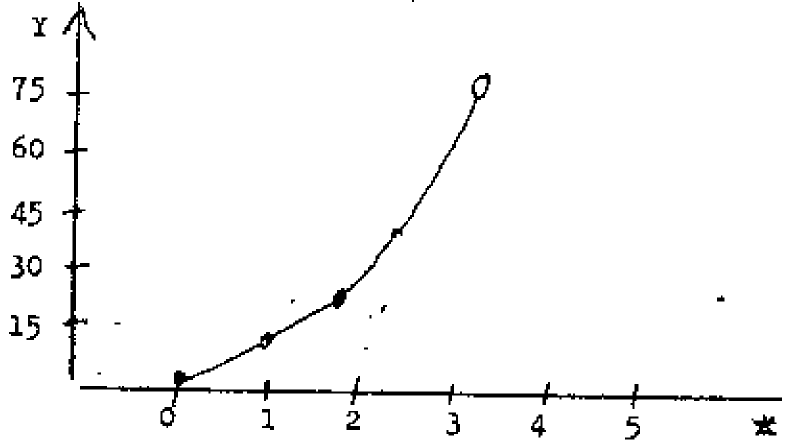
$$b^t = \frac{P_3 - P_2}{P_2 - P_1}$$

$$a = \frac{P_2 - P_1}{b^t - 1}$$

$$k = P_1 - a$$

Şimdi varsayılı verilerimizi kullanarak hesaplama sürecini anlatmaya çalışalım.

Yıl	X	Y		
1955	0	3	P_1	3
1956	1	7		5
1957	2	9	P_2	9
1958	3	21		17
1959	4	33	P_3	33
1960	5	70		73



Eğride seçilen üç noktanın yerileri görülmektedir.

Sonra

$$b = \frac{P_3 - P_2}{P_2 - P_1} = \frac{33-9}{9-3} = \frac{24}{6} = 4 \longrightarrow b = \sqrt{4} = 2$$

$$a = \frac{P_2 - P_1}{b^2 - 1} = \frac{9-3}{4-1} = 2$$

$$k = P_1 - a = 3 - 2 = 1$$

Böylece denklem $Y_o \quad 1 \quad 2\,(2)^x$

Orijin X 0 7/1/1955

Şimdi yarıortalamalar yöntemini kullanalım.Verilerimizi üç guruba ayıralım ve toplamlarını S1,S2 S3 ile gösterelim.

$$\left.\begin{array}{l} Y_o = k+a \\ Y_1 = k+ab \end{array}\right\} \cdots\cdots S_1 \qquad S_1 = 2k+a(b+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_2 = k+ab^2 \\ Y_3 = k+ab^3 \end{array}\right\} \cdots\cdots S_2 \qquad S_2 = 2k+ab^2(b+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_4 = k+ab^4 \\ Y_5 = k+ab^5 \end{array}\right\} \cdots\cdots S_3 \qquad S_3 = 2k+ab^4(b+1)$$

3 bilinmeyen ve üç denklemımız vardır.Bunları çözerek a,b ile k katsayılarını çözebiliriz.

$$b^2 = \frac{S_3 - S_1}{S_2 - S_1} =$$

$$2k = S_1 \quad \frac{S_2 - S_1}{b^2 - 1} =$$

$$a = \frac{S_2 - S_1}{(b^2-1)(b\ 1)} = (S_2 - S_1) \frac{e-1}{(b^2-1)(b^2-1)}$$

Eğer her gurupta n tane gözlem varsa formüller.

$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} ; \quad nk = S_1 - \frac{S_2 - S_1}{b^n - 1} ; \quad a = (S_2 - S_1) \frac{b-1}{(b^n-1)(b^n-1)}$$

Şimdi verilerimizi kullanarak değiştirilmiş üslü eğriyi yarı ortalamalar yöntemiyle bulmaya çalışalım.

Yıl	X	Y	
1955	0	3	S_1 10
1956	1	7	
1957	2	9	S_2 30
1958	3	21	
1959	4	32	S_3 102
1960	5	70	

$$b^2 = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} = \frac{102 - 30}{30 - 10} = \frac{72}{20} = 3,6$$

$$2k = S_1 - \frac{S_2 - S_1}{b^2 - 1} = 10 - \frac{30-10}{3,6-1} = 2,3$$

$$k = 1,15$$

$$a = \frac{S_2 - S_1}{(b^2-1)(b-1)} = 2,67$$

$$Y_c = 1,15 + 2,67\ (1,89)^x \qquad 7/1/1955$$

LOGİSTİK EĞRİ

TV endüstrinisinin büyümesi lojistik eğri için iyi bir örnektir.TV'nin bir ülkeye yeni girdıği sıralarda üretim çok yüksektir.Fakât zamanla doyum noktasına ulaşıldığında tedrici bir azalma olacaktır.Biyolojik büyüme ile nüfus artışlarında da çeşitlı nedenlerle aynı durum gözlenebilir.Bu şekilde ki büyümeleri göstermede lojıstık eğri kullanılabilmektedir.1920 lerde Raymand Pearl ile L.J. Reed in populasyon ve biyolojik büyümelerin analızinde bu eğriyi kullanmaları litaratüre geçmiştir.Keza,bu eğrı endüstrisinin büyümesinde kullanılmakta, fakat sonuçlar iyi olmamaktadır.

Lojistik eğrinin genel şekli.

$$Y_c = \frac{k}{1+e^{f(x)}}$$

burada k bir sabittır ve f (x) de X'in polinomudur.

$$f(x) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

genellikle f (x) : a_0+a_1X şeklindedir ve lojistik eğri

$$Y_c = \frac{k}{1+e^{a_0+a_1X}}$$

şeklinde olmaktadır.

e' sayısı yerine genellikle 10 kullanılmaktadır.Böylece

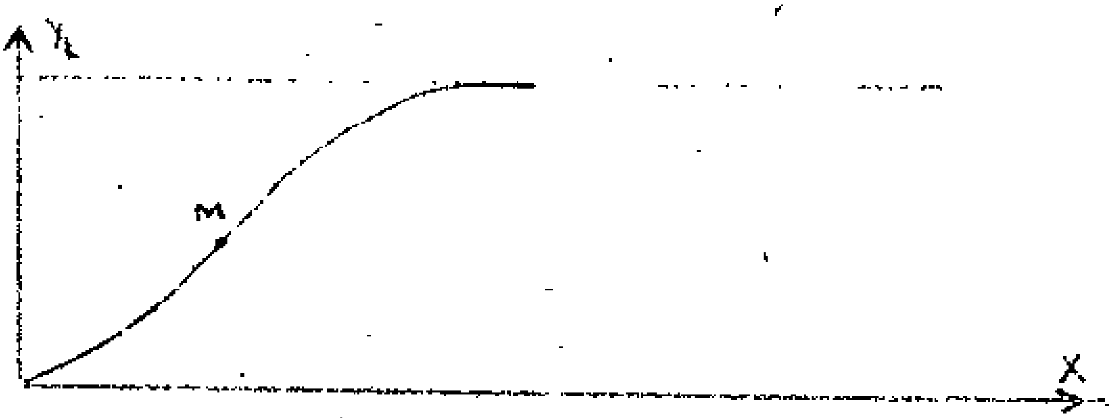
$$Y_c = \frac{k}{1+10^{a+bx}}$$

burada b genellikle b $<$ 0 olan bir sayıdır.Bu takdirde

$$X \to \infty \text{ için } 10^{a+bx} \to 0$$

k: üst asimtodtur. Yc $\longrightarrow$ k olmaktadır.

Lojistik eğri genellikle şu şekilde gösterilmektedir.



M noktasının altında kalan kısma point of inflextion (eğim noktası), büyüme eranı, artma oranı taşınıyor. M'nin yukarısı bir azalma eranı taşınıyer.

a,b ile k sabitleri seçilmiş noktalar yada yadıor talamalar yöntemiyle bulunabilir. Örnekle açıklamaya çalışalım.

Seçilmiş noktalar yöntemi :

Yıl	X	Y
1955	0	Y0........P_1
1956	1	Y1........
____	2	Y2........P2
____	3	Y3........
____	4	Y4........P3
____	5	Y5........

Verilerimizi grafik üzerinde işaretliyelim ve Freehand lejistik eğrisini çizelim. Şu şekilde üç nokta seçelim.

X:0 X:2 X:4 eğri üzerinde bu noktaların Y değer - leri P_1 P_2 P_3 olsun .Sonra

$$Y_c = \frac{k}{1+10^{a}} \qquad Y_c = \frac{k}{1+10^{a+bx}}$$

formülünden

$$P_1 = \frac{k}{1+10^{a}} \qquad P_2 = \frac{k}{1+10^{a+2b}} \qquad P_3 = \frac{k}{1+10^{a+4b}}$$

bulabiliriz.

3 bilinmiyen ile 3 denklemimiz vardır. Bunlardan a,b,k bulunabilir.

$$\frac{\frac{1}{P_3} - \frac{1}{P_2}}{\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}} = \frac{10^{a+4b} - 10^{a+2b}}{10^{a+2b} - 10^{a}} = 10^{2b} = \frac{P_1(P_3-P_2)}{P_3(P_2-P_1)}$$

her iki tarafın logaritmasını alırsak

$$2b = \log \frac{P_1(P_3-P_2)}{P_3(P_2-P_1)}$$

a parametresini bulmak için :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1+10^{a+2b}}{1+10^a} \Rightarrow 10^a = \frac{P_1-P_2}{P_2 10^{2b}-P_1} \Rightarrow a = \log \frac{P_1-P_2}{P_2 10^{2b}-P_1}$$

Sonuçta $P_1 = \frac{k}{1+10^a}$ denklerinden k' yıda bulabiliriz.

$$k = P_1(1+10^a)$$

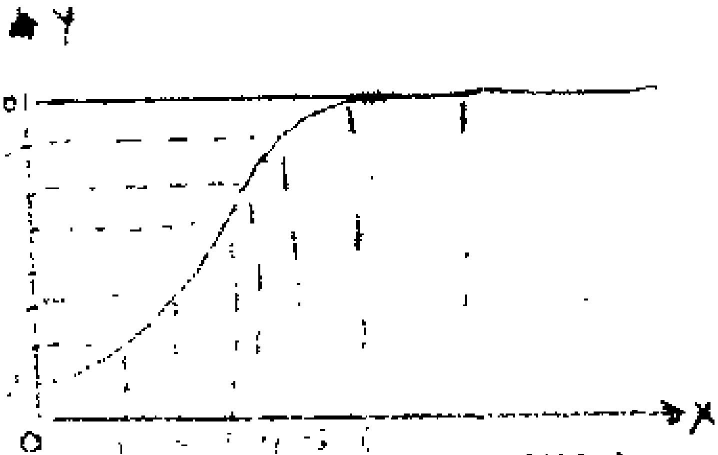
n yılda ise formüller

$$nb = \log \frac{P_1(P_3-P_2)}{P_3(P_2-P_1)} \qquad k = P_1(1+10^a)$$

$$a = \log \frac{P_1-P_2}{P_2 10^{nb}-P_1}$$

Şimdi şu vedileri lojistik eğriye uydurmaya çalışalım.

Yıl	X	Y	
1955	0	2	P_1
	1	4	
	2		P_2
	3	6	
	4	9	
	5	10	P_3



Eğrinin aniden yükselmesine ve sonda düzleşmesine dikkak etmelidir. Eğri üzerinde secilen X=0, X=2, X=4 noktaları kolaylık olsun diye Y= 2,Y6,Y9 noktalarını alalım. Yukarıdaki formülleri kullanarak a, a, ile k katsayılarını bulalım.

$$2b = \log \frac{P_1(P_3-P_2)}{P_3(P_2-P_1)} = \log \frac{2(9-6)}{9(6-2)} = -0{,}7\ldots$$

böylece b=-0,3891

a için:

k için:

Böylece lojistik eğri: $Y_c = \frac{10}{1+10^{0.6021-0.3891X}}$

X=0 7/1/1955

Yarı ortalamalar yöntemi :

Lojistik eğriyi bulmanın ikinci yolu yarı ortalamalar yöntemidir. lojistik eğriyi ele alalım tekrar .

[illegible]

Şimdi bunun invert'ini alalım.

[illegible]

Denklemimiz [illegible] değiştirilmiş üslüeğri şeklini alacaktır. Bu yüzden ,değiştirilmiş üslü eğriler için çıkarılmış formüllerimizi burada kullanılabiliriz.

$$(b')^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}$$

$$a' = (S_2 - S_1)\frac{b' - 1}{[(b')^n - 1][(b')^n - 1]}$$

$$k' = S_1 - \frac{S_2 - S_1}{(b')^n - 1}$$

Burada S_1 ,S_2, S_3 ,n yıla ait veri grublarından çıkarılmış 3 toplamdır. Hesaplanma şekli daha önce verilmişti.

Gompertz eğrisi :

Gompertz eğrisi ismini Benjamin Gompertz'in 1825'te ölenlerle ilişkili çalışmalarında bu eğriyi kullanmasından sonra almıştır. Genel Şekli.

$$Y = k\, a^{bx}$$ şeklinde gösteriliyor.

Burada k,b.k birer sabittir. Örneğin Y,X yazında sağ kalanların sayısı olabilir.
burada a,b ile k'yı bulabilmek için önce logaritmasını alalım.

$$\log Y_c = \log k + (\log a)\,(b^x)$$

$\log Y_c = Y'_c$, $\log k = k'$,$\log a = a'$ diyelim, denklemimiz:

$$Y'_c = k' + a' b^x$$

bundan sonra değiştirilmiş üslü fonksiyonlar için uygu- ladığımız katsayıları tahminde uyguladığımız işlemleri uygulayabiliriz.

Hareketli ortalama :

Daha önceki bölümde basit hareketli ortalama trend'in bulunmasıyla mevsimlik hareketin (olayların) bulunmasında kullanılmıştı. Bu bölümde, en küçük kareler yöntemiyle bulunan düz-trend doğrusunun merkez değerlerinden (y-intercept) elde edilen noktaların sıralanışını başit hareketli ortalama olarak göstereceğiz. Sonrada, tartılı hareketli ortalamaları tartışaçağız.

Aşağıdaki 7 yıllık verileri ele alalım:

Yıl	X	Y
1955	0	Y_0
1956	1	Y_1
⋮	—	—
⋮	—	—
⋮	—	—
⋮	—	—
⋮	—	—
1961	6	Y_6

Bu verileri 3 yıllık hareketli ortalamaları alındığı zaman

$$Z_1=\frac{1}{3}\ (Y_0+Y_1+Y_2)$$

$$Z_2=\frac{1}{3}\ (Y_1+Y_2+Y_3)$$

.... Şeklinde devam edecektir. Şimdi birbirini takip eden 3 yıl için en küçük kareler yöntemini uyguluyalım. İlk 3 yıl (Y_0, Y_1, Y_2) için en küçük kareler yöntemiyle bir düz doğru elde edelim sonra bu işlemi (Y_1, Y_2, Y_3) için tekrarlayalım. Ve bu şekilde devam etsin. İlk 3 yıl için veriler şöyledir.

Yıl	X	Y
1955	-1	Y_0
1956	0	Y_1
1957	1	Y_2

Normal denklemler:

$$\sum Y_i = na_1$$

$$\sum XY = b\sum X^2 \quad \text{buradan}$$

$$a_1 = \frac{1}{n}\sum Y_1$$

Buradan $a_1 = \frac{1}{3}(Y_0+Y_1+Y_2)$ bulunabilir.

Bu ilk üç yılın ortalamasıdır. Bu işlemi (Y_1, Y_2, Y_3) için tekrarladığımızda

$a_2 = \frac{1}{3}(Y_1+Y_2+Y_3)$ 3 yıl yerine, yıl sayısını istediğimiz kadar uzatabiliriz. Yıl sayısını tek aldığımız zaman -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...yıl sayısını çift aldığımız zaman -3, -1, 1, 3, şeklinde gidecektir.